UNTERSUCHUNGEN

ÜBER

MIKROMETERSCHRAUBEN,

MIT BESONDERER ANWENDUNG AUF DAS FADENMIKROMETER DES 9ZÖLLIGEN AEQUATOREALS DER BERLINER STERNWARTE.

DISSERTATIO INAUGURALIS ASTRONOMICA

QUAM

CONSENSU ET AUCTORITATE

AMPLISSIMI PHILOSOPHORUM ORDINIS

IN

ALMA LITTERARUM UNIVERSITATE FRIDERICA GUILELMA BEROLINENSI

PRO

SUMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBUS

RITE CAPESSENDIS

UNA CUM THESIBUS

DIE IV M. AUGUSTI A. MDCCCLXXVII

H. L. Q. S.

PUBLICE DEFENDET

AUCTOR

G. MUELLER
SILESIACUS.

ACAD.
LUGD. BAT.
BIBL.

ADVERSARII ERUNT:

L. BOSSE, CAND. MATH.
P. KEMPF, STUD. MATH.
A. RIGGENBACH, STUD. PHIL.

BEROLINI
TYPIS A. W. SCHADII
STALLSCHREIBER-STRASSE 47.

Bei der ausserordentlichen Bedeutung, welche die Mikrometerschraube in der Astronomie als eines der wichtigsten Hülfsmittel zur Ausmessung von Linear- und Winkelgrössen gewonnen hat, ist es wünschenswerth, die Grösse ihrer Leistungsfähigkeit kennen zu lernen und ihre Fehler durch geeignete Untersuchungen zu bestimmen. Obgleich jetzt in den mechanischen Werkstätten Mikrometerschrauben von hoher Vollkommenheit gefertigt werden, so würde doch ein blindes Vertrauen auf ihre Güte in vielen Fällen gefährlich sein, weil die verschiedensten Ursachen dazu beitragen können, die Fehler einer Schraube so gross zu machen, dass sie selbst bei weniger feinen Messungen erheblich ins Gewicht fallen. — Bessel hat in seiner Abhandlung über das preussische Längenmaass und im zweiten Bande der astronomischen Untersuchungen zuerst ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung der Fehler einer Mikrometerschraube entwickelt. Nach seinem Vorgange haben sich dann andere Astronomen mit diesem Gegenstand beschäftigt, und gegenwärtig wendet man bei feinen Messungen wohl kaum eine Mikrometerschraube an, deren Fehler nicht sorgfältig bestimmt sind. — Auch bei den Instrumenten der Berliner Sternwarte sind die messenden Schrauben geprüft, und namentlich ist die Mikrometerschraube des Fadenmikrometers am 9zölligen Aequatoreal vor einer Reihe von Jahren von Hrn. Prof. Förster untersucht worden. Seit dieser Zeit hat der Mikrometerapparat Veränderungen erfahren, und es war zu erwarten, dass die Schraube in dem jetzigen Zustand ein anderes Verhalten zeigen würde. Ich habe daher auf Anregung des Hrn. Prof. Förster die Schraube des Fadenmikrometers einer erneuten Untersuchung unterworfen und bin dabei zu Resultaten gelangt, die für das allgemeine Verhalten von Mikrometerschrauben in einigen Punkten vielleicht nicht ohne Interesse sind.

Für die Darlegung der Messungen und ihre Berechnung bedarf es einer Uebersicht der dabei angewandten Methoden und Formeln, welche ich daher in Zusammenfassung der besten bisherigen Untersuchungen voranschicke.

Die Abweichungen von dem einfachen Gesetz der Schraube — nämlich der Proportionalität der Drehungswinkel und der Linearbewegungen in der Richtung der Schraubenaxe — lassen sich bekanntlich in zwei Hauptgruppen sondern:

1) Verschiedenheiten der bei einer gleichen Anzahl voller Schraubenumdrehungen stattfindenden Linearbewegungen an verschiedenen Stellen der Schraube (fortschreitende Ungleichheit.)

2) Verschiedenheiten der in gleichen Eintheilungsintervallen je einer vollen Schraubenumdrehung stattfindenden Linearbewegungen (periodische Fehler).

Bezeichnet man die Ablesungen der Drehungswinkel der Schraube, in ganzen Umdrehungen und Bruchtheilen derselben (mittelst Scala oder Zählwerk und Trommel) ausgedrückt, mit a, den Linearwerth der Bewegung in der Richtung der Axe während einer vollen Umdrehung, in irgend einer Maasseinheit ausgedrückt, mit l, den Drehungswinkel zwischen den Ablesungen a_0 und a mit r, wobei eine volle Umdrehung 2π als Einheit genommen ist, die Linearbewegung zwischen den Drehungsablesungen a_0 und a mit s, so würde man bei einer vollkommenen Schraube haben:

$$\frac{ds}{dr} = l \text{ also } s = rl + \text{Const.}$$

Hätte die Schraube keine periodischen, aber fortschreitende Fehler von geringem Betrage und nahezu gesetzmässigem Verlaufe, so würde näherungsweise zu setzen sein:

$$\frac{ds}{dr} = l_0 + \alpha_1 r + \alpha_2 r^2 + \alpha_3 r^3 + \ldots.$$

wo l_0 der Werth des Differentialquotienten $\frac{ds}{dr}$ für die Ablesung a_0 wäre. Man würde dann haben:

$$s = l_0 r + \tfrac{1}{2}\alpha_1 r^2 + \tfrac{1}{3}\alpha_2 r^3 + \tfrac{1}{4}\alpha_3 r^4 + \ldots. + \text{Const.}$$

wobei wegen $s = o$ für $r = o$ die Constante verschwinden würde. Die Schraube wird nun um so vollkommener sein, je schneller die Coefficienten α dieser Reihe gegen Null convergiren. Wie die Erfahrung bei mehreren Schrauben gezeigt hat, kann man mit genügender erster Näherung annehmen:

$$s = l_0 r + \tfrac{1}{2}\alpha_1 r^2.$$

Ein dieser Formel unter der Voraussetzung eines sehr kleinen Werthbetrages von α_1 ungefähr entsprechender, d. h. langsamer und nahezu regelmässiger Verlauf des fortschreitenden Fehlers gut gearbeiteter Schrauben ist auch schon dadurch wahrscheinlich gemacht, dass sich stets eine gewisse Anzahl von Schraubenwindungen gleichzeitig innerhalb der Schrauben-

mutter befindet und dass daher eine ungehemmte Bewegung nur dann möglich ist, wenn die einander benachbarten Windungen nahezu gleiche Höhe haben. Ueberhaupt müssen ja alle Windungen der Schraube mit denen der Mutter nahe übereinstimmen.

Die obige Näherungsformel kann man auch schreiben:

$$s = l_0 \{ (a - a_0) + \alpha (a - a_0)^2 + \ldots \}$$

wo man einfach $l_0 \alpha$ für $\frac{1}{2} \alpha_1$ gesetzt hat.

Die Correction wegen der periodischen Fehler stellt man durch eine Reihe dar, die nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen des Drehungswinkels fortschreitet, und deren allgemeine Form ist:

$$\alpha' \cos a + \beta' \sin a + \alpha'' \cos 2a + \beta'' \sin 2a + \ldots.$$

Giebt also die Schraubentrommel zuerst die Ablesung a_0, dann a, und bezeichnet man den vom Mikrometerschlitten zurückgelegten Weg mit s, so wird

$$s = l_0 [a - a_0 + \alpha (a - a_0)^2 + \alpha' (\cos a - \cos a_0) + \beta' (\sin a - \sin a_0) + \ldots].$$

Hat man noch eine dritte Ablesung a', so ist der zwischen a_0 und a' liegende Weg s' in derselben Weise ausgedrückt durch die Formel:

$$s' = l_0 [a' - a_0 + \alpha (a' - a_0)^2 + \alpha' (\cos a' - \cos a_0) + \beta' (\sin a' - \sin a_0) \ldots].$$

Durch Subtraction der beiden Gleichungen erhält man den Weg, den der Mikrometerschlitten zwischen zwei beliebigen Ablesungen a und a' zurücklegt, nämlich:

$$s' - s = l_0 \{ a' - a + \alpha [(a' - a_0)^2 - (a - a_0)^2] + \alpha' (\cos a' - \cos a) + \beta' (\sin a' - \sin a) \ldots \}$$

oder

$$s' - s = l_0 \{ a' - a + \alpha (a' - a)(a' + a - 2a_0) + \alpha' (\cos a' - \cos a) + \beta' (\sin a' - \sin a) \ldots \}.$$

Bezeichnet man $a' - a$ mit b, so ergiebt sich endlich:

$$\text{(I)} \qquad s' - s = l_0 \{ b + \alpha b (2a + b - 2a_0) + \alpha' [\cos (a + b) - \cos a] + \beta' [\sin (a + b) - \sin a] + \ldots \}.$$

Dies ist die von Bessel in seiner Abhandlung über das preussische Längenmaass gegebene Form, deren Vorzug darin liegt, dass sie gleichzeitig beide Arten von Fehlern umfasst. Um die Coefficienten dieser Formel zu bestimmen, bedarf man einer grösseren Anzahl von Messungen, deren Anfangspunkte gleichmässig über den Umfang der Schraubentrommel vertheilt sein müssen. Denkt man sich eine Distanz, deren Werth in Schraubenwindungen ausgedrückt f sein möge, von Anfangspunkten, die gleichmässig um $\frac{2\pi}{n}$ aus einander liegen, durch m Windungen hindurch gemessen und nennt die an der Trommel abgelesenen Bewegungen:

$$\begin{array}{llll} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} \ldots\ldots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & b_{2,3} \ldots\ldots & b_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ b_{m,1} & b_{m,2} & b_{m,3} \ldots\ldots & b_{m,n} \end{array}$$

so hat man folgende Gleichungen, wenn die fortschreitenden Fehler auf den ersten Anfangspunkt a_0 bezogen werden:

$$\left\{\begin{array}{l}
f = b_{1,1} + \alpha b_{1,1} (b_{1,1}) + \alpha' [\cos (a_0 + b_{1,1}) - \cos a_0] + \beta' [\sin (a_0 + b_{1,1}) - \sin a_0] + . \\
f = b_{1,2} + \alpha b_{1,2} \left(\frac{2}{n} + b_{1,2}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{1,2}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{1,2}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + . \\
f = b_{1,3} + \alpha b_{1,3} \left(\frac{4}{n} + b_{1,3}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{4\pi}{n} + b_{1,3}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{4\pi}{n}\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{4\pi}{n} + b_{1,3}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{4\pi}{n}\right)\right] + . \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
f = b_{1,n} + \alpha b_{1,n} \left(\frac{2(n-1)}{n} + b_{1,n}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi + b_{1,n}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi + b_{1,n}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + .
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
f = b_{2,1} + \alpha b_{2,1} (2 + b_{2,1}) + \alpha' [\cos (a_0 + b_{2,1}) - \cos a_0] + \beta' [\sin (a_0 + b_{2,1}) - \sin a_0] + . \\
f = b_{2,2} + \alpha b_{2,2} \left(\frac{2(n+1)}{n} + b_{2,2}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{2,2}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{2\pi}{n} + b_{2,2}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{2\pi}{n}\right)\right] + . \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
f = b_{2,n} + \alpha b_{2,n} \left(\frac{2(2n-1)}{n} + b_{2,n}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi + b_{2,n}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi + b_{2,n}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + .
\end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{l}
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot
\end{array}\right.$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$\left\{\begin{array}{l}
f = b_{m,1} + \alpha b_{m,1} [2(m-1) + b_{m,1}] + \alpha' [\cos (a_0 + b_{m,1}) - \cos a_0] + \beta' [\sin (a_0 + b_{m,1}) - \sin a_0] + . \\
\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\
f = b_{m,n} + \alpha b_{m,n} \left(\frac{2(mn-1)}{n} + b_{m,n}\right) + \alpha' \left[\cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n} + b_{m,n}\right) - \cos \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + \beta' \left[\sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi + b_{m,n}\right) - \sin \left(a_0 + \frac{2(n-1)}{n} \pi\right)\right] + .
\end{array}\right.$$

Aus diesen m Systemen von je n Gleichungen sind nun die Unbekannten f, α, α', β', α'', β'' .... nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Die Umständlichkeit dieser Rechnung kann man sich jedoch in den meisten Fällen wesentlich erleichtern. Was zunächst den Coefficienten α betrifft, so lässt sich derselbe getrennt von den übrigen Coefficienten auf folgende Weise ermitteln. Da der Betrag der periodischen Glieder in den ersten, zweiten, dritten u. s. w. Gleichungen sämmtlicher Systeme meistens sehr nahe gleich ist, so wird es erlaubt sein, bei der Subtraction zweier solcher Gleichungen die periodischen Glieder zu vernachlässigen. Wir wollen ferner in dem kleinen mit α multiplicirten Gliede überall einen Mittelwerth b statt der einzelnen verschiedenen b einführen. Betrachtet man zunächst nur die ersten Gleichungen sämmtlicher m Systeme, eliminirt aus diesen den Werth von f, indem man je zwei von einander subtrahirt, und addirt alle so erhaltenen Resultate, so folgt für die beiden Fälle eines geraden und ungeraden m:

für m gerade
$$(b_{1,1}-b_{m,1})(m-1)+(b_{2,1}-b_{m-1,1})(m-3)+\ldots.+3\left(b_{\frac{m}{2}-1,1}-b_{\frac{m}{2}+2,1}\right)+\left(b_{\frac{m}{2},1}-b_{\frac{m}{2}+1,1}\right)$$
$$=2\alpha b[(m-1)^2+(m-3)^2+\ldots.+3^2+1]=2\alpha b\,\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{1.2.3}$$

für m ungerade
$$(b_{1,1}-b_{m,1})(m-1)+(b_{2,1}-b_{m-1,1})(m-3)+\ldots.+4\left(b_{\frac{m-1}{2}-1,1}-b_{\frac{m-1}{2}+3,1}\right)+2\left(b_{\frac{m-1}{2},1}-b_{\frac{m-1}{2}+2,1}\right)$$
$$=2\alpha b[(m-1)^2+(m-3)^2+\ldots.+4^2+2^2]=2\alpha b\,\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{1.2.3}.$$

Behandelt man die zweiten Gleichungen sämmtlicher Systeme, ebenso die dritten, vierten u. s. w. in analoger Weise, so erhält man entsprechende Formeln, deren rechte Seiten sämmtlich identisch sind. Addirt man endlich alle Gleichungen und führt die Bezeichnungen ein:

$$B_1=\frac{1}{n}\,(b_{1,1}+b_{1,2}+b_{1,3}+\ldots.+b_{1,n})$$
$$B_2=\frac{1}{n}\,(b_{2,1}+b_{2,2}+b_{2,3}+\ldots.+b_{2,n})$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$B_m=\frac{1}{n}\,(b_{m,1}+b_{m,2}+b_{m,3}+\ldots.+b_{m,n}),$$

so ergiebt sich die einfache Endformel:

$$\text{(II)}\qquad (B_1-B_m)(m-1)+(B_2-B_{m-1})(m-3)+\ldots.=2\alpha b\,\frac{(m-1)\,m\,(m+1)}{1.2.3}.$$

Wären, wie in dem Bessel'schen Falle, vier Windungen der Schraube untersucht, so erhielte man den Coefficienten α aus der Gleichung:

$$20\alpha b=3\,(B_1-B_4)+(B_2-B_3),$$

wo B_1, B_2, B_3, B_4 die arithmetischen Mittel aus den Werthen sind, welche innerhalb der betrachteten vier Windungen bei den verschiedenen Anfangspunkten gefunden sind. —

Die Formel (II) giebt ein bequemes Mittel, die fortschreitenden Fehler einer Schraube angenähert zu ermitteln, doch ist das Verfahren nur auf eine geringe Anzahl von Windungen anwendbar, weil nur in diesem Falle die Annahme einer gleichförmigen Aenderung des Werthes einer Schraubenumdrehung statthaft sein kann. Sehr brauchbar wird sich die Formel dann erweisen, wenn es sich darum handelt, eine Reihe von Messungen, die zur Ermittlung der periodischen Fehler durch mehrere auf einander folgende Windungen hindurch angestellt sind, von dem störenden Einfluss der fortschreitenden Fehler zu befreien. In diesem Falle giebt der leicht zu berechnende Coefficient α ein brauchbares Mittel, die Beobachtungen rein periodisch zu machen. — Berechnen wir mit dem gefundenen α für jede Messung den Werth $\alpha b\,(2a+b-2a_0)$, so erhalten wir durch Anbringung dieser Correctionen ein neues System von Werthen b, aus welchem die Coefficienten der periodischen Glieder zu bestimmen sind. Die allgemeine Gleichungsform ist nun:

$$f=b+\alpha'\,[\cos(a+b)-\cos a]+\beta'\,[\sin(a+b)-\sin a]+\alpha''\,[\cos 2\,(a+b)-\cos 2a]+\ldots.$$

Jedes der m Systeme würde n solcher Gleichungen liefern, und es müssten, streng genommen, die Coefficienten für jedes System besonders berechnet werden. Man verfährt jedoch genau genug (vorausgesetzt, dass m nicht sehr gross ist), wenn man die m Systeme der Werthe b zu einem vereinigt, indem man die arithmetischen Mittel der um eine volle Umdrehung aus einander liegenden Werthe von b bildet, die im Folgenden mit b_1, b_2, b_3 .... b_n bezeichnet werden sollen, und hat daher zur Bestimmung von α', β', α'', β'' .... die folgenden Gleichungen:

$$\text{(III)}\quad\begin{cases}
f=b_1+\alpha'[\cos(a_1+b_1)-\cos a_1]+\beta'[\sin(a_1+b_1)-\sin a_1]+\alpha''[\cos 2(a_1+b_1)-\cos 2a_1]+\ldots. \\
f=b_2+\alpha'\left[\cos\left(a_1+\frac{2\pi}{n}+b_2\right)-\cos\left(a_1+\frac{2\pi}{n}\right)\right]+\beta'\left[\sin\left(a_1+\frac{2\pi}{n}+b_2\right)-\sin\left(a_1+\frac{2\pi}{n}\right)\right]+\ldots. \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
f=b_n+\alpha'\left[\cos\left(a_1+\frac{2(n-1)}{n}\pi+b_n\right)-\cos\left(a_1+\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right]+\beta'\left[\sin\left(a_1+\frac{2(n-1)}{n}\pi+b_n\right)-\sin\left(a_1+\frac{2(n-1)}{n}\pi\right)\right].
\end{cases}$$

Wie viele Glieder in der periodischen Reihe mitzunehmen sind, bedarf in jedem Fall einer besonderen Entscheidung. Gewöhnlich kann man sich mit der Berücksichtigung des doppelten Winkels begnügen; doch werden Fälle vorkommen, wo auch die höheren Vielfachen noch Einfluss haben.

Die strenge Auflösung der Gleichungen (III) würde auch eine Bestimmung von f erforderlich machen. Bildet man die Summe sämmtlicher Gleichungen, so ergiebt sich:

$$nf = \Sigma b + \alpha' \Sigma \cos(a+b) + \beta' \Sigma \sin(a+b) - \alpha' \Sigma \cos a - \beta' \Sigma \sin a + \ldots.$$

$\Sigma \cos a$, $\Sigma \sin a$, $\Sigma \cos 2a$ u. s. w. sind Null, weil die Anfangspunkte a gleichmässig über den Umfang der Schraubentrommel vertheilt sind. Dagegen sind $\Sigma \cos(a+b)$, $\Sigma \sin(a+b)$, $\Sigma \cos 2(a+b)$ u. s. w. nur dann Null, wenn in den einzelnen Gliedern der Summen überall ein constanter Werth von b angenommen werden darf. Machen wir zunächst diese Voraussetzung und substituiren den Mittelwerth b_0 für die einzelnen b, so wird $nf = \Sigma b$ und $f = b_0$. Die Gleichungen (III) erhalten mithin die folgende allgemeine Form:

$$b_0 = b + \alpha' [\cos(a+b_0) - \cos a] + \beta' [\sin(a+b_0) - \sin a] + \alpha'' [\cos 2(a+b_0) - \cos 2a] + \beta'' [\sin 2(a+b_0) - \sin 2a] \ldots.$$

Verwandelt man die Differenzen der Cosinus und Sinus in Producte und setzt $b = b_0 + \Delta b$, so wird die allgemeine Gleichungsform:

$$\Delta b - 2\alpha' \sin\left(a + \tfrac{b_0}{2}\right) \sin \tfrac{b_0}{2} + 2\beta' \cos\left(a + \tfrac{b_0}{2}\right) \sin \tfrac{b_0}{2} - 2\alpha'' \sin(2a + b_0) \sin b_0 + 2\beta'' \cos(2a + b_0) \sin b_0 \ldots = 0.$$

Denkt man sich die n einzelnen Gleichungen aufgestellt und nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, so erhält man zur Bestimmung der Coefficienten die einfachen Endgleichungen:

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} n \sin \frac{b_0}{2}\, \alpha' = & \Sigma \left[\Delta b \sin\left(a + \frac{b_0}{2}\right)\right] \\ n \sin \frac{b_0}{2}\, \beta' = - & \Sigma \left[\Delta b \cos\left(a + \frac{b_0}{2}\right)\right] \\ n \sin b_0\, \alpha'' = & \Sigma \left[\Delta b \sin(2a + b_0)\right] \\ n \sin b_0\, \beta'' = - & \Sigma \left[\Delta b \cos(2a + b_0)\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

Die Gewichte der Unbekannten sind durch die Relationen bestimmt:

$$p_{(\alpha')} = p_{(\beta')} = 2n \sin^2 \frac{b_0}{2}$$

$$p_{(\alpha'')} = p_{(\beta'')} = 2n \sin^2 b_0 \quad \text{u. s. w.}$$

wobei das Gewicht der Grössen $b_1\ b_2 \ldots b_n$ als Einheit genommen ist.

Die Gleichungen (IV) ermöglichen eine sehr bequeme Berechnung der Coefficienten α', β', α'', $\beta'' \ldots$ In den meisten Fällen wird auch die dabei zu Grunde gelegte Annäherung statthaft sein, weil die Δb klein genug sein werden, um die Einführung von b_0 statt f und statt der einzelnen b zu erlauben. Indess werden auch Fälle vorkommen, wo f merklich von dem Mittelwerth b_0 abweicht, wie z. B. die von Bessel in seinem Aufsatz über das preussische Längenmaass untersuchte Schraube zeigt, bei welcher der Unterschied zwischen f und b_0 0.0009 Umdrehungen beträgt.

In No. 2100 der Astr. Nachr. giebt Dr. Lamp in einem Aufsatz über die Bessel'sche Correctionsformel für Mikrometerschrauben ein Verfahren an, mittelst dessen man sogleich den erwähnten Unterschied zwischen f und b_0 finden kann. Die dabei benutzte Formel, deren Entwicklung ich hier übergehe, lautet:

$$u = -\frac{\pi}{8} (B_1 - B_2)^2 \cot \tfrac{1}{2} b_0,$$

wo u der gesuchte Unterschied $f - b_0$ ist, und B_1, B_2 die grösste und kleinste Abweichung der Werthe b von ihrem arithmetischen Mittel bezeichnen. — Die Formel ist von Interesse, weil sie durch eine sehr einfache Rechnung von vornherein die Entscheidung giebt, ob die Näherungsrechnung ausreichend ist.

Gewöhnlich wird man so verfahren, dass man zunächst ohne Rücksicht auf die Vernachlässigung des Werthes $f - b_0$ die Gleichungen (IV) benutzt und daraus ein System von Coefficienten ableitet. Mit Hülfe dieser Coefficienten wird man die für jedes b erforderliche Correction berechnen und das arithmetische Mittel aus den verbesserten b bilden; dies liefert den Werth von f. Selten wird der Unterschied zwischen f und b_0 so gross sein, dass eine zweite genauere Bestimmung der Coefficienten erforderlich wäre. Sollte sich eine sehr beträchtliche Differenz zeigen, so dürfte man die Näherungsformeln (IV) überhaupt nicht anwenden. Man müsste sich dann der strengen Gleichungen (III) bedienen, die Winkelgrössen für jedes einzelne b berechnen und die Unbekannten f, α', β', α'', $\beta'' \ldots$ streng nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen; ein Verfahren, welches die Rechnung freilich wesentlich compliciren würde.

Die Gleichungen (IV) geben auch die Entscheidung, welche Distanz sich am besten zur Bestimmung der Coefficienten eignet. Wählt man f nahe gleich einer halben Umdrehung (also $b_0 = 180^0$), so werden α' und β' am sichersten erhalten, dagegen α'' und β'' in Folge ihrer sehr kleinen Coefficienten nur ungenaue Werthe liefern. Bei f nahe gleich $\frac{1}{4}$ Umdrehung wird die Bestimmung von α'' und β'' am sichersten, die von α' und β' weniger zuverlässig. Gleiche Genauig-

keit kann man erwarten, wenn f nahe gleich $\frac{1}{3}$ oder $\frac{2}{3}$ Umdrehungen gewählt wird. Meistens begnügt man sich zur Bestimmung der periodischen Fehler nicht mit der Ausmessung einer einzigen Distanz, sondern wählt deren mehrere und vereinigt die daraus unabhängig von einander abgeleiteten Coefficientensysteme nach den Principien der Methode der kleinsten Quadrate zu dem wahrscheinlichsten Systeme. Am zweckmässigsten wird es dabei nach dem Obigen sein, ein Intervall von $\frac{1}{2}$ Umdrehung mit einem andern von $\frac{1}{4}$ Umdrehung zu combiniren.

Will man gänzlich von der Bestimmung der periodischen Fehler frei sein, so kann man dies durch die Art der Messungen erreichen. Misst man dieselbe Distanz f von zwei Anfangspunkten, die um 180° auseinander liegen, so erhält man die beiden Werthe:

$$f = b_1 - 2\alpha' \sin\left(a + \frac{f}{2}\right) \sin\frac{f}{2} \qquad + 2\beta' \cos\left(a + \frac{f}{2}\right) \sin\frac{f}{2} - \ldots\ldots$$

$$f = b_2 - 2\alpha' \sin\left(a + 180 + \frac{f}{2}\right) \sin\frac{f}{2} + 2\beta' \cos\left(a + 180 + \frac{f}{2}\right) \sin\frac{f}{2} - \ldots\ldots$$

Im Mittel aus beiden Werthen verschwinden die mit α' und β' multiplicirten Glieder. Wählt man 3 Anfangspunkte, die um je 120° auseinander liegen, so wird das arithmetische Mittel aus den 3 gefundenen Werthen unabhängig von den mit α', β', α'', β'' multiplicirten Gliedern. Gewöhnlich misst man von 5 Anfangspunkten, die um je $\frac{1}{5}$ Umdrehung auseinander liegen; das arithmetische Mittel ist dann frei von dem Einfluss der periodischen Glieder bis zum vierfachen Winkel und wird als gültig anzunehmen sein für den mittleren Anfangspunkt. Man wird also von den Anfangspunkten $a - 0^R.4$, $a - 0.2$, a, $a + 0.2$, $a + 0.4$ aus messen, wenn man den für die Ablesung a gültigen Werth der gemessenen Distanz frei von periodischen Fehlern finden will. Dieses sichere Mittel, den Einfluss der periodischen Fehler einer Schraube aus den Messungen zu entfernen, würde immer angewendet werden, wenn sich der Ausführung nicht bei vielen Apparaten Hindernisse in den Weg stellten und wenn nicht ein erheblicher Zeitaufwand damit verbunden wäre. Zur zeitweiligen Prüfung einer für die Schraube berechneten periodischen Correctionsformel wird das angegebene Verfahren ein willkommnes Mittel sein. Auch wird man sich desselben mit Vortheil bedienen, wenn es sich darum handelt, die fortschreitenden Fehler einer Schraube zu bestimmen, deren periodische Fehler nicht sicher bekannt sind.

Die früher entwickelte Formel (II) gab bereits ein Mittel an, die fortschreitende Ungleichheit einer Schraube kennen zu lernen, doch wurde auch schon dort auf die verhältnissmässig beschränkte Anwendung dieser Formel hingewiesen. Wenn man die verschiedenen Werthe, welche der Grösse einer Schraubenwindung entsprechen, über die ganze Ausdehnung der Schraube hin feststellen will, so bedarf man dazu einer besonderen Reihe von Messungen, die von dem Einfluss der periodischen Fehler durch irgend ein Verfahren befreit sein müssen. Man verfährt dann in ähnlicher Weise, wie bei der Bestimmung der Theilungsfehler einer Lineartheilung. Bezeichnet man mit w die Anzahl der sämmtlichen Schraubenwindungen und misst eine Distanz, die nahe $\frac{w}{n}$ Windungen, etwa $\frac{w}{n} + x_1$ Windungen, umfasst, von den Angaben 0, $\frac{w}{n}$, $2\frac{w}{n}$, ... $\frac{n-1}{n}w$ der Scala aus und findet dafür die Werthe $\frac{w}{n} + l_1$, $\frac{w}{n} + l_2$ ..... $\frac{w}{n} + l_n$, so hat man die folgenden Gleichungen, wenn die gesuchten Correctionen $\varphi(0), \varphi\left(\frac{w}{n}\right), \varphi\left(\frac{2w}{n}\right)$ ..... $\varphi\left(\frac{n-1}{n}w\right)$ genannt werden:

$$x_1 = l_1 + \varphi\left(\frac{w}{n}\right) - \varphi(0)$$

$$x_1 = l_2 + \varphi\left(\frac{2w}{n}\right) - \varphi\left(\frac{w}{n}\right)$$

$$x_1 = l_3 + \varphi\left(\frac{3w}{n}\right) - \varphi\left(\frac{2w}{n}\right)$$

. . . . . .

$$x_1 = l_n + \varphi\left(\frac{nw}{n}\right) - \varphi\left(\frac{n-1}{n}w\right)$$

Man kann nun zwei von den Correctionen willkürlich annehmen, weil man nur das Verhältniss irgend eines Theiles der Schraube zu den übrigen kennen will. Setzt man daher $\varphi(0) = 0$ und $\varphi(w) = 0$, so erhält man durch Addition der vorstehenden Gleichungen: $x_1 = \frac{\Sigma l}{n}$ und damit:

$$\varphi\left(\frac{w}{n}\right) = \frac{\Sigma l}{n} - l_1$$

$$\varphi\left(\frac{2w}{n}\right) = 2\frac{\Sigma l}{n} - (l_1 + l_2)$$

. . . . . .

$$\varphi\left(m\frac{w}{n}\right) = m\frac{\Sigma l}{n} - (l_1 + l_2 + \ldots + l_m).$$

Der wahrscheinliche Fehler einer auf diese Weise gefundenen Correction ergiebt sich leicht, wie folgt. Ist $r\left(\varphi\frac{mw}{n}\right)$ der

wahrscheinliche Fehler der Correction $\varphi\left(\frac{mw}{n}\right)$, ferner $r(l)$ der wahrscheinliche Fehler einer zu Grunde liegenden Messung, so erhält man aus der Gleichung: $\varphi\left(\frac{mw}{n}\right) = \frac{m-n}{n}(l_1 + l_2 + \ldots + l_m) + \frac{m}{n}(l_{m+1} + l_{m+2} + \ldots + l_n)$.

$$r^2\left(\varphi\frac{mw}{n}\right) = \frac{(m-n)^2}{n^2} m r^2(l) + \frac{m^2}{n^2}(n-m) r^2(l) = \frac{(n-m)m}{n} r^2(l).$$

Ist ferner $p(l)$ das Gewicht einer Messung l und $p\left(\varphi\frac{mw}{n}\right)$ das Gewicht einer gefundenen Correction, so wird:

$$\frac{p\left(\varphi\frac{mw}{n}\right)}{p(l)} = \frac{r^2(l)}{r^2\left(\varphi\frac{mw}{n}\right)} = \frac{n}{(n-m)m}.$$

Wenn man also das Gewicht einer einzelnen Messung als Einheit nimmt, so wird das Gewicht einer Correction

$$p\left(\varphi\frac{mw}{n}\right) = \frac{n}{(n-m)m},$$

oder wenn man $\frac{n}{m}$ mit k bezeichnet:

$$p\left(\varphi\frac{mw}{n}\right) = \frac{k^2}{k-1} \cdot \frac{1}{n}.$$

Hat man nun in derselben Weise mehrere verschiedene Distanzen gemessen, so wird man durch geeignete Wahl derselben verschiedene Bestimmungen für dieselbe Correction erhalten, deren Gewichte sich aus der obigen Formel ermitteln lassen. Man sieht aus dieser Formel, dass bei der Berechnung derselben Correction mittelst verschiedener Annahmen von n (wobei der Werth von k constant ist) die Genauigkeit um so grösser wird, je kleiner n, je grösser also die gemessene Distanz ist. Untersucht man beispielsweise bei einer Länge von 120 Schraubenwindungen die Windung 60, indem man in Intervallen von 10, 12, 15, 20, 30, 60 Umdrehungen misst, so werden die Gewichte der damit gefundenen Werthe von $\varphi_{(60)}$ der Reihe nach $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, 1, 2. — Bessel verfährt bei seiner Untersuchung der Schraube des Königsberger Heliometer zur Bestimmung der fortschreitenden Ungleichheit etwas anders. Er misst eine Distanz von nahe 10 Windungen $(10^R + i_1)$ von den Anfangspunkten 0, 10, 20 .... 110, ebenso eine Distanz von nahe 20 Windungen $(20^R + i_2)$ von den Anfangspunkten 0, 10, 20 .... 100 u. s. w., endlich eine Distanz von nahe 60 Windungen $(60^R + i_6)$ von den Anfangspunkten 0, 10, 20 .... 60 und bestimmt aus den so erhaltenen 57 Gleichungen die 17 Unbekannten i_1, i_2 .... i_6, $\varphi_{(10)}$, $\varphi_{(20)}$ .... $\varphi_{(110)}$ (wobei $\varphi_{(0)}$ und $\varphi_{(120)}$ gleich Null gesetzt sind) nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Es wird in den meisten Fällen ausreichend sein, die Correctionen für Intervalle von 10 zu 10 Windungen nach den im Vorgehenden erörterten Verfahren zu bestimmen; für die nicht direct untersuchten Windungen wird man sich der Interpolation bedienen können. In der Praxis wird sich sehr oft die Schwierigkeit entgegenstellen, dass die Einrichtung des Apparates nicht die Messung jeder beliebigen Distanz erlaubt. Man muss dann die vorhandenen Distanzen möglichst vortheilhaft zu verwerthen suchen oder man muss sich ähnlicher Hülfsmittel bedienen, wie sie Bessel und Kaiser bei ihren Untersuchungen angewendet haben. —

Nachdem ich mich im Vorhergehenden bemüht habe, die allgemeinen für die Untersuchung von Schrauben geltenden Formeln und Vorschriften zu entwickeln, wende ich mich nun zur speciellen Untersuchung der Mikrometerschraube am Fadenmikrometer des 9zölligen Aequatoreals der Berliner Sternwarte.

Das Fadenmikrometer dieses Instruments hat, seit es im Jahre 1829 aus der Fraunhofer'schen Werkstatt hervorgegangen ist, nur geringfügige Veränderungen erfahren und verdient, wenn man seine Leistungsfähigkeit nach einem ununterbrochenen Gebrauch von fast 50 Jahren berücksichtigt, mit Recht ein Meisterwerk genannt zu werden. Die Construction des Apparates ist genugsam bekannt, um eine nähere Beschreibung überflüssig erscheinen zu lassen. Ich verweise auf eine sehr ausführliche Beschreibung in einer Schrift von Kaiser*). Hier dürften nur einige Bemerkungen über die Fädensysteme am Platz sein. In der Focalebene des Objectivs befinden sich auf ein und derselben Platte zwei zu einander rechtwinklige Fädensysteme, von denen jedes aus 4 zu einander parallelen Fäden besteht. Das eine System dient dazu, die Antritte bei Sterndurchgängen zu fixiren, während das andere in die Richtung der täglichen Bewegung gebracht wird. Das ganze System kann vermittelst einer gewöhnlichen Schraube bewegt und in einer beliebigen Stellung durch eine Klemmvorrichtung festgehalten werden. Ich will dieses System zum Unterschiede von den durch die Mikrometerschraube bewegten Fäden das feste System nennen und die zur Bewegungsrichtung des Schlittens senkrechten Fäden desselben, von der bewegenden Schraube aus gezählt, mit IV, III, II, I bezeichnen. Ueber dieses System hinweg bewegt sich mit Hülfe der eigentlichen Mikrometerschraube ein zweiter Schlitten, welcher parallel zu den Fäden I, II, III, IV der unteren Platte zwei Fäden trägt, die ich im Folgenden die beweglichen Fäden nennen werde und nach ihrer Entfernung von der Schraube aus mit a und b bezeichnen will. Die Schraube hat 80 Windungen. Die ganzen Umdrehungen werden an einer Scala abgelesen, während die Hundertel an der in 100 Theile getheilten Schraubentrommel unmittelbar

*) Erste metingen met den micrometer. Leiden 1840, S. 25 ff.

abgelesen und die Tausendstel bequem geschätzt werden können. Bei einer beliebigen Angabe der Scala und der Trommel lassen sich durch entsprechende Verstellung des unteren Systems die beweglichen mit den festen Fäden zur Deckung bringen. Doch hat dies für jeden einzelnen Faden gewisse Grenzen. Da die untere Platte sich nach beiden Richtungen nur um eine bestimmte Strecke verschieben lässt, so wird eine Coincidenz der beweglichen Fäden mit Faden I nur zwischen den Angaben 0 und 56 der Scala, mit Faden II zwischen 13 und 67, mit Faden III zwischen 23 und 77 und endlich mit Faden IV nur zwischen 28 und 80 möglich sein. Diese Unvollkommenheit wird bei der Benutzung der vorhandenen Fadendistanzen zur Bestimmung der fortschreitenden Fehler der Schraube fühlbar sein, weniger bei den Beobachtungen, wo die Wahl des festen Fadens meistens beliebig ist. Die Distanzen der einzelnen Fäden sind ungefähr die folgenden:

I — II = 10.3 Umdrehungen
II — III = 10.4 -
III — IV = 5.2 -

endlich das Intervall der beiden beweglichen Fäden 1.5 Umdrehungen.

Ich gebe zunächst die Resultate meiner Untersuchungen über die periodischen Fehler. Da die Messungen zum grössten Theil im Winter ausgeführt wurden, so schien es zweckmässig, um den störenden Einfluss der Kälte zu beseitigen, den gesammten Mikrometerapparat von dem Instrument zu entfernen und bei möglichst gleichmässiger Zimmertemperatur zu messen. Zu diesem Zweck wurde ein passendes Holzstativ angefertigt, in welchem der Apparat in fast verticaler Stellung ein sehr sicheres Lager erhielt und welches erlaubte, die Messungen bei bequemer Körperstellung auszuführen. Ein Uebelstand war, dass der Apparat während der Zeit meiner Untersuchungen auch beständig zu Planetenbeobachtungen benutzt und daher fortwährenden Temperaturänderungen ausgesetzt wurde. Um diesem Uebelstand zu begegnen, trug ich stets dafür Sorge, dass der Apparat bereits mehrere Stunden im Zimmer stand, bevor ich meine Messungen begann. Ueberhaupt suchte ich jeden störenden äusseren Einfluss nach Kräften zu beseitigen, indem ich die Schraube stets frei von Staub hielt und die Verdickung des Oels durch öfteres Reinigen und frisches Einölen verhütete. Vor Beginn einer neuen Messungsreihe überzeugte ich mich fast stets erst durch Wiederholung einiger früherer Messungen von dem unveränderten Zustande des Apparats. Sehr störend war die etwas starke parallactische Wirkung bei dem Uebereinandergleiten der beiden Platten, die ihren Hauptgrund in einer etwas losen Bewegung der unteren Platte zu haben schien. Der Einfluss derselben liess sich durch die Art der Messungen nicht eliminiren; ich suchte ihn durch die grössere Zahl der Einstellungen abzuschwächen. Die Einstellungen selbst geschahen in der bekannten Weise, dass der bewegliche Faden zu beiden Seiten des festen Fadens gebracht wurde und zwar so nahe, dass nur eine schwache Lichtlinie übrig blieb. Das Mittel aus den beiden zugehörigen Ablesungen galt als eine Einstellung. Für die Messung jeder Distanz wurden 5 solche Einstellungen bei der Anfangsablesung und 5 bei der Endablesung gemacht, so dass jede zur Rechnung benutzte Zahl auf 20 Ablesungen beruht. Die Drehung der Schraube geschah zur Vermeidung des todten Ganges stets in derselben Richtung. Die angewandte Ocularvergrösserung war ungefähr eine 30 fache. — Als erstes Messungsintervall wurde die Distanz der beiden beweglichen Fäden gewählt. Allerdings wird bei der Bestimmung von periodischen Fehlern meistens die Vorschrift befolgt, dass das zur Messung benutzte Intervall ein Bruchtheil einer einzigen Umdrehung sein müsse. Indess scheint mir diese Vorschrift nicht durchaus bindend zu sein, da einmal bei fast allen Schrauben eine gewisse Anzahl auf einander folgender Umdrehungen, die gleichzeitig in der Schraubenmutter enthalten sind, ein beinahe vollkommen identisches Verhalten zeigt, und da ferner ein merklicher Einfluss der hierbei hauptsächlich in Betracht kommenden fortschreitenden Fehler durch die früher entwickelte Formel beseitigt werden kann. Ich habe es daher nicht für nothwendig gehalten, zu den vorhandenen Fadendistanzen ein neues Intervall hinzuzufügen und habe ohne Bedenken das kleinste der vorhandenen Intervalle, 1.5 Umdrehungen, zu einer ersten Messungsreihe benutzt, obgleich hier ein anderer Uebelstand eintrat, dass nämlich eine nur ungenaue Bestimmung der Coefficienten der vom doppelten Winkel abhängigen Glieder in der periodischen Reihe zu erwarten war. — Es wurden zuerst die 4 Windungen 20 bis 23 der Schraube untersucht. Der Faden *b* wurde mit dem festen Faden II, während die Schraubentrommel nahe 20.0 angab, 5 mal nach einander zur Coincidenz gebracht, dann der Faden *a* in derselben Weise behandelt und das arithmetische Mittel aus den 10 ersten Ablesungen von dem der 10 letzten Ablesungen subtrahirt; die Differenz galt als der Werth des gemessenen Fadenintervalls für die Anfangsablesung 20.0. Ebenso wurden für jedes Zehntel durch die 4 erwähnten Windungen der Schraube hindurch Messungen gemacht. Ich gebe in der folgenden Tabelle die für diese Messungsreihe gefundenen Zahlen wieder, welche im Ganzen auf 800 Ablesungen beruhen.

	Anfang	0 Zehntel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
	20	1.5188	1.5165	1.5140	1.5080	1.5027	1.4980	1.4999	1.5029	1.5087	1.5124	1.5082
A)	21	1.5193	1.5181	1.5134	1.5078	1.5025	1.4985	1.4993	1.5023	1.5105	1.5176	1.5089
	22	1.5156	1.5164	1.5129	1.5089	1.5049	1.5006	1.4999	1.5055	1.5103	1.5159	1.5091
	23	1.5202	1.5196	1.5145	1.5094	1.5053	1.5005	1.5006	1.5039	1.5104	1.5132	1.5098
	Mittel	1.5185	1.5176	1.5137	1.5085	1.5039	1.4994	1.4999	1.5036	1.5100	1.5148	1.5090

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die 4 untersuchten Windungen übereinstimmend dasselbe Verhalten zeigen. Ein Maximum der gemessenen Distanz ergiebt sich beim 0^{ten} Zehntel, ein Minimum beim 5^{ten} Zehntel. Der Einfluss der fortschreitenden Ungleichheit ist ein unbedeutender; man erkennt zwar an den arithmetischen Mittelwerthen der einzelnen Horizontalreihen ein Zunehmen der gemessenen Distanz, also ein Abnehmen des Werthes einer Schraubenwindung; doch sind die Unterschiede so gering, dass man, ohne Fehler zu begehen, die Werthe als rein periodisch annehmen dürfte. Ich habe trotzdem nach unserer früheren Formel (II) den Coefficient α berechnet und dafür den Werth $-0^R.00017$ gefunden. Wenn man mit Hülfe dieses Coefficienten die einzelnen Messungen corrigirt, so findet man die folgenden Werthe, die mit Ausnahme von zwei grösseren Abweichungen, welche wohl Beobachtungsfehlern zur Last gelegt werden dürfen, eine beinahe vollständige Uebereinstimmung der Periode in den 4 untersuchten Windungen anzeigen.

B)

Anfang	0 Zehntel	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
20	1.5184	1.5161	1.5135	1.5075	1,5021	1.4974	1.4992	1.5022	1.5079	1.5116	1.50759
21	5184	5172	5124	5068	5014	4974	4981	5011	5092	(5163)	50783
22	(5142)	5150	5114	5074	5033	4990	4982	5038	5085	5141	50749
23	5183	5177	5125	5074	5032	4984	4984	5017	5081	5109	50766
Mittel	1.51732	1.51650	1.51245	1.50728	1.50250	1.49805	1.49847	1.50220	1.50843	1.51322	1.50764

Es wird hier ohne Zweifel erlaubt sein, die Mittelwerthe der einzelnen Verticalreihen als gültig für jede der Windungen anzunehmen. Benutzen wir die früheren Gleichungen (IV), so gestaltet sich die Berechnung der Coefficienten α', β', α'', β'', wie folgt:

Anfang	Δb	$a+\frac{1}{2}b_0$	$\sin(a+\frac{1}{2}b_0)$	$\cos(a+\frac{1}{2}b_0)$	$2a+b_0$	$\sin(2a+b_0)$	$\cos(2a+b_0)$	$\Delta b\sin(a+\frac{1}{2}b_0)$	$\Delta b\cos(a+\frac{1}{2}b_0)$	$\Delta b\sin(2a+b_0)$	$\Delta b\cos(2a+b_0)$
0.0 u. 0.5	+0.00968 u.−0.00959	91° 22'.5	9.99988	8.38013$_n$	182° 45'	8.68104$_n$	9.99950$_n$	+0.019265	−0.000462	−0.0000043	−0.0000899
0.1 u. 0.6	+0.00886 u.−0.00917	127 22.5	9.90019	9.78321$_n$	254 45	9.98443$_n$	9.42001$_n$	+0.014328	−0.010945	+0.0002991	+0.0000815
0.2 u. 0.7	+0.00481 u.−0.00544	163 22.5	9.45653	9.98145$_n$	326 45	9.73901$_n$	9.92235	+0.002933	−0.009821	+0.0003454	−0.0005269
0.3 u. 0.8	−0.00036 u.+0.00079	199 22.5	9.52081$_n$	9.97468$_n$	38 45	9.79652	9.89203	+0.000382	+0.001085	+0.0002691	+0.0003354
0.4 u. 0.9	−0.00514 u.+0.00558	235 22.5	9.91534$_n$	9.75450$_n$	110 45	9.97087	9.54936$_n$	+0.008821	+0.006091	+0.0004115	−0.0001559
							Σ	+0.045729	−0.014052	+0.0013208	−0.0003558
$b_0 = 182° 45'$		$10\sin\frac{1}{2}b_0$	0.99988		$10\sin b_0$	9.68104$_n$		8.66019	8.14774$_n$	7.12083	6.55121$_n$
								$\log\alpha'$	$\log\beta'$	$\log\alpha''$	$\log\beta''$
								7.66031	7.14786	7.43979$_n$	6.87017$_n$

Der Einfachheit wegen sind bei dieser Rechnung die um eine halbe Umdrehung auseinander liegenden Werthe, bei denen dieselben Winkelgrössen wiederkehren (beim einfachen Winkel mit umgekehrten Vorzeichen), vereinigt. Es ergeben sich für die Coefficienten die Werthe:

$$\alpha' = +0.004574$$
$$\beta' = +0.001406$$
$$\alpha'' = -0.002753$$
$$\beta' = -0.000742.$$

Die ausgeglichene Angabe der Schraubentrommel zwischen der 20^{sten} und 23^{sten} Windung ist demnach:

$$a + 0.004574\cos a + 0.001406\sin a - 0.002753\cos 2a - 0.000742\sin 2a \ldots$$

Wendet man diese Formel auf die Anfangs- und Endpunkte der in Tabelle *B)* gegebenen Grössen an, so erhalten diese die folgenden Werthe:

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
20	1.5090	1.5078	1.5086	1.5078	1.5078	1.5066	1.5082	1.5077	1.5074	1.5051	1.50760
21	1.5090	5089	5075	5071	5071	5066	5071	5066	5087	5098	50784
22	1.5048	5067	5065	5077	5090	5082	5072	5093	5080	5076	50750
23	1.5089	5094	5076	5077	5089	5076	5074	5072	5076	5044	50767
Mittel	1.5079	1.5082	1.5075	1.5076	1.5082	1.5072	1.5075	1.5077	1.5079	1.5067	1.50765

Das arithmetische Mittel aller dieser Zahlen giebt den genauen Werth f der gemessenen Distanz; wir finden denselben hier vollständig mit dem Mittel aus den für periodische Fehler noch nicht corrigirten Messungen übereinstimmend. Bildet man die Abweichungen v der einzelnen Zahlen von ihrem Mittelwerth, so findet man den wahrscheinlichen Fehler einer nach obiger Formel corrigirten Beobachtung vermittelst der Formel $r = \pm 0.6745 \sqrt{\frac{(v^2)}{36}}$; die Ausführung der Rechnung ergiebt $r = \pm 0.00084$.

Da bei dem untersuchten Mikrometerapparat der Werth einer Schraubenwindung 15,324 Bogensecunden beträgt, so ergiebt sich für den übrig bleibenden wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen nach unserer Formel corrigirten Messung innerhalb des betrachteten Intervalls von 20 bis 23 der Werth $\pm 0''.013$. Zur weiteren Untersuchung der periodischen Fehler habe ich die Windungen 30 bis 33, 40 bis 43, 50 bis 53, 60 bis 63 in derselben Weise, wie ich es im Vorgehenden für die Windungen 20 bis 23 dargelegt habe, durch Messungen derselben Distanz geprüft. Aus den gefundenen Zahlen wurden zunächst wieder die Werthe α abgeleitet, immer bezogen auf die erste Anfangsablesung jedes Satzes; man erhielt

für 30 — 33 $\alpha = +0.000287$
40 — 43 $= +0.000195$
50 — 53 $= -0.000008$
60 — 63 $= +0.000033$.

Die mit Hülfe dieser Coefficienten von dem Einfluss der fortschreitenden Fehler befreiten Beobachtungen habe ich in den folgenden Tafeln zusammengestellt:

30 — 33.

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
30	1.5179	1.5183	1.5131	1.5113	1.5049	1.5028	1.5030	1.5057	1.5081	1,5145	1.50996
31	5190	5192	5136	5100	5089	5032	5027	5070	5099	5174	51109
32	5192	5177	5156	5094	5088	5007	5010	5062	5107	5145	51038
33	5175	5171	5136	5085	5041	5039	5035	5072	5096	5170	51020
Mittel	1.51840	1.51808	1.51397	1.50980	1.50668	1.50265	1.50255	1.50653	1.50957	1.51585	1.51041

40 — 43.

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
40	1.5161	1.5191	1.5126	1.5061	1.5018	1.5010	1.5031	1.5046	1.5103	1.5147	1,50894
41	5172	5171	5123	5091	5057	5030	5018	5058	5109	5166	50995
42	5182	5165	5160	5116	5047	5034	5000	5041	5125	5160	51030
43	5167	5161	5116	5081	5023	5056	5007	5044	5102	5129	50886
Mittel	1.51705	1.51720	1.51312	1.50873	1.50362	1.50325	1.50140	1.50473	1.51097	1.51505	1.50951

50 — 53.

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
50	1.5183	1.5163	1.5127	1.5090	1.5063	1.5008	1.5013	1.5027	1.5112	1.5164	1.50950
51	5181	5174	5142	5103	5024	5008	5013	5030	5104	5148	50927
52	5171	5171	5142	5095	5034	5005	5007	5057	5099	5143	50924
53	5171	5185	5142	5089	5044	5001	5024	5049	5105	5149	50959
Mittel	1.51765	1.51732	1.51383	1.50942	1.50413	1. 50055	1.50142	1.50408	1,51050	1.51510	1.50940

60 — 63.

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
60	1.5175	1.5124	1,5110	1.5063	1.5032	1.5018	1.4992	1 5026	1.5097	1.5149	1.50786
61	5170	5147	5126	5058	5011	4991	4981	5026	5104	5142	50756
62	5146	5114	5104	5053	5011	4992	5001	5028	5055	5142	50646
63	5156	5138	5134	5092	5029	5020	5022	5022	5072	5137	50822
Mittel	1.51617	1.51308	1.51185	1.50665	1.50207	1.50052	1.49990	1.50255	1.50820	1.51425	1.50753

Aus den in den letzten Horizontalreihen jedes Satzes stehenden Mittelwerthen habe ich nun die folgenden Correctionsformeln abgeleitet:

$$\begin{aligned}
\text{für } 30 - 33 \quad \varphi(a) &= +0.003760\cos a + 0.001227\sin a - 0.001532\cos 2a - 0.003370\sin 2a \\
40 - 43 \quad &= +0.003886\cos a + 0.000959\sin a - 0.001785\cos 2a - 0.002520\sin 2a \\
50 - 53 \quad &= +0.004185\cos a + 0.001238\sin a - 0.002837\cos 2a + 0.000967\sin 2a \\
60 - 63 \quad &= +0.003933\cos a + 0.000889\sin a - 0.007044\cos 2a - 0.004729\sin 2a.
\end{aligned}$$

Die Anwendung dieser Formeln auf die einzelnen zu Grunde liegenden Beobachtungen giebt die folgenden übrig bleibenden wahrscheinlichen Fehler

$$\begin{aligned}
\text{für } 30 - 33 \quad r &= \pm 0^R.000994 = \pm 0''.015 \\
40 - 43 \quad &= \pm 0\ .001215 = \pm 0\ .019 \\
50 - 53 \quad &= \pm 0\ .000683 = \pm 0\ .011 \\
60 - 63 \quad &= \pm 0\ .001119 = \pm 0\ .017.
\end{aligned}$$

Obgleich diese Darstellung eine befriedigende genannt werden darf, so sind doch die gefundenen Formeln in der bisherigen Gestalt noch unvollkommen, weil die Coefficienten der vom doppelten Winkel abhängigen Glieder kein grosses Vertrauen verdienen. Man sieht dies am besten an dem ungemein kleinen Gewicht, welches diese Coefficienten im Vergleich zu α' und β' haben. Berechnet man die Gewichte der Coefficienten für die einzelnen untersuchten Theile der Schraube, so erhält man die folgenden Werthe:

	$p(\alpha') = p(\beta')$	$p(\alpha'') = p(\beta'')$
für 20 — 23	19.989	0.046
30 — 33	19.979	0.085
40 — 43	19.982	0.071
50 — 53	19.982	0.070
60 — 63	19.989	0.045.

Für die gefundenen Coefficienten ergeben sich noch im Durchschnitt die folgenden wahrscheinlichen Fehler: für die Coefficienten α' und $\beta' \pm 0^R.000108$, für die Coefficienten α'' und $\beta'' \pm 0^R.001974$.

Um zuverlässigere Werthe für α'' und β'' zu erhalten, war es wünschenswerth, ein anderes Intervall zu einer zweiten Messungsreihe zu benutzen. Da unsere obigen Formeln über die ganze Ausdehnung der Schraube von 20^R bis 60^R nur geringe Verschiedenheiten zwischen den einzelnen Werthen der Coefficienten α' und β' zeigen, und da ferner aus den Messungen geschlossen werden darf, dass die fortschreitenden Fehler keinen merklichen Einfluss ausüben können, so habe ich mich für berechtigt gehalten, ein ziemlich grosses Intervall, nämlich die Distanz der festen Fäden I und II (10.34 Umdrehungen) zu einer zweiten Reihe von Messungen zu benutzen. Abgesehen davon, dass man mit Hülfe dieses Intervalls eine gleich gute Bestimmung der einzelnen Coefficienten erwarten konnte, habe ich diese Distanz auch aus dem Grunde gewählt, weil bei der schon früher erwähnten ersten Untersuchung der Mikrometerschraube eine ähnliche Distanz benutzt worden war, und ich so einen bequemen Anhalt zur Vergleichung des jetzigen Zustandes der Schraube mit dem früheren zu finden hoffte. — Es wurden zunächst wieder die sämmtlichen Zehntel der Windungen 20 bis 23 zu Anfangspunkten gewählt und die Messungen mit Hülfe des einen beweglichen Faden in derselben Weise wie früher angestellt. Es ergab sich für den Coefficient α der Werth $+0.000024$; die damit corrigirten Beobachtungen sind die folgenden:

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
20	10.3479	10.3498	10.3519	10.3448	10.3419	10.3387	10.3341	10.3366	10.3409	10.3443	10.34309
21	3496	3523	3514	3474	3417	3399	3357	3364	3408	3456	34408
22	3482	3538	3515	3474	3437	3384	3356	3367	3420	3458	34431
23	3471	3497	3498	3454	3420	3374	3357	3373	3413	3448	34305
Mittel	10.34820	10.35140	10.35115	10.34625	10.34233	10.33860	10.33527	10.33675	10.34125	10.34513	10.34363

Aus den Mittelwerthen sind die Coefficienten berechnet:

		Wahrscheinliche Fehler:
$\alpha' = +0.004188$	Gewicht 15.549	± 0.000107
$\beta' = +0.001140$	- 15.549	± 0.000107
$\alpha'' = -0.000095$	- 13.843	± 0.000113
$\beta'' = -0.000138$	- 13.843	± 0.000113.

Die mittelst dieser Coefficienten verbesserten Werthe geben für den übrig bleibenden wahrscheinlichen Fehler einer einzelnen Beobachtung den Werth $r = \pm 0^R.000842 = \pm 0''.0129$.

Dieselbe Distanz wurde nun auch von allen Zehnteln der Windungen 40 bis 43 gemessen und aus den Beobachtungen der Coefficient $\alpha = -0.0000031$ berechnet. Die damit corrigirten Werthe sind:

Anfang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Mittel
40	10.3410	10.3466	10.3458	10.3446	10.3394	10.3345	10.3314	10.3360	10.3359	10.3385	10.33937
41	3415	3463	3460	3431	3382	3354	3339	3336	3350	3397	33927
42	3420	3462	3451	3426	3383	3352	3325	3343	3354	3394	33910
43	3423	3454	3443	3420	3392	3362	3333	3348	3366	3402	33943
Mittel	10.34170	10.34612	10.34530	10.34308	10.33877	10.33533	10.33277	10.33468	10.33572	10.33945	10.33929

Man findet hieraus die folgenden Coefficienten:

		Wahrscheinliche Fehler:
$\alpha' = +0.003229$	Gewicht 15.324	± 0.000087
$\beta' = +0.001420$	- 15.324	± 0.000087
$\alpha'' = -0.000371$	- 14.337	± 0.000090
$\beta'' = -0.000048$	- 14.337	± 0.000090.

Der wahrscheinliche Fehler einer corrigirten Beobachtung wird

$$r = \pm 0^R.000678 = \pm 0''.0104.$$

Die strenge Behandlung der Aufgabe würde nun für die anderen untersuchten Stellen der Schraube ebenfalls eine Ausmessung des zweiten Intervalls erfordern, um überall aus der Combination der beiden unabhängig von einander gefundenen Systeme der Coefficienten zuverlässige Correctionsformeln abzuleiten. Die geringe Verschiedenheit zwischen den sämmtlichen gefundenen Werthen schien mir jedoch den Versuch zu gestatten, eine einzige Correctionsformel für die ganze Ausdehnung von 20 bis 60 aufzustellen; zu diesem Zweck glaubte ich mich in Rücksicht auf die Kleinheit von α'' und β'' mit den beiden für 20 und 40 ermittelten genaueren Werthen begnügen zu können. Es wäre sogar erlaubt, die Glieder mit dem doppelten Winkel ganz zu vernachlässigen, ohne den wahrscheinlichen Fehler einer Correction merklich zu vergrössern. Es wurden die aus den 7 verschiedenen Messungsreihen erhaltenen Werthe von α', β', α'', β'' mit Berücksichtigung ihrer Gewichte zu einem System vereinigt und damit die Correctionsformel gebildet:

$$\varphi(a) = +0.003984 \cos a + 0.001176 \sin a - 0.000264 \cos 2a - 0.000114 \sin 2a \ldots.$$

Aus dieser Formel wurde eine kleine Tafel berechnet, welche die für jedes Hundertel des Umfanges der Schraubentrommel erforderliche Correction angiebt. Diese Tafel ist am Schluss beigefügt. — Um zu sehen, wie die gefundene Correctionsformel die periodischen Fehler beseitigt, habe ich für die sämmtlichen Messungsreihen die Verbesserungen aus der Tafel entnommen und die folgenden übrig bleibenden wahrscheinlichen Fehler erhalten:

20 — 23	I. Reihe	$r = \pm 0^R.00115 = \pm 0''.018$
20 — 23	II. Reihe	$0^R.00088 = 0''.013$
30 — 33		$0^R.00106 = 0''.016$
40 — 43	I. Reihe	$0^R.00121 = 0''.019$
40 — 43	II. Reihe	$0^R.00102 = 0''.016$
50 — 53		$0^R.00074 = 0''.011$
60 — 63		$0^R.00120 = 0''.018$.

Der aus den Abweichungen der wiederholten Einstellungen an ein und derselben Stelle der Schraube berechnete wahrscheinliche Fehler eines Mittelwerthes von der Einheit des Gewichtes beträgt $\pm 0^R.00048 = \pm 0''.007$.

Da der grösste wahrscheinliche Fehler noch nicht 2 Hundertel Bogensecunden erreicht, so halte ich die Anwendung unserer Formel auf die ganze Ausdehnung der Schraube von 20 bis 60 für genügend. Um ihre Brauchbarkeit auch für Stellen ausserhalb dieses Intervalls oder für solche Stellen innerhalb dieses Intervalls zu prüfen, die nicht direct bei der Bestimmung der einzelnen Coefficienten betheiligt waren, habe ich eine Anzahl Messungen gemacht, indem ich nach dem früher beschriebenen Verfahren den Werth der untersuchten Distanz frei von periodischen Fehlern bestimmte und damit den nach der Tafel corrigirten Werth verglich. So wurde die Entfernung der festen Fäden II und III von den Anfangspunkten 14.6, 14.8, 15.0, 15.2, 15.4, wie folgt, gemessen:

Anfang	Gemessenes Intervall
14.6	10.3902
14.8	3986
15.0	4068
15.2	4055
15.4	3959.

Das arithmetische Mittel 10.3994 giebt den für den Anfangspunkt 15.0 gültigen Werth frei von periodischen Fehlern; bringt man aber an die bei dem Anfangspunkt 15.0 unmittelbar gefundene Ablesung 10.4068 die Correction der Tafel an, so erhält man den Werth 10.4005. Die Abweichung 0.0011 von dem obigen Werth liegt noch innerhalb der Grenzen der wahrscheinlichen Fehler. In derselben Weise habe ich die Entfernung der Fäden II und III noch an 4 anderen Stellen gemessen und die folgenden Resultate erhalten:

Anfang	Frei von per. Fehlern durch die Anordn. d. Mess.	Corrigirt nach der Tafel	Rechn. — Beob.
25.4	10.3966	10.3969	+ 0.0003
35.8	3959	3955	— 0.0004
46.2	3971	3976	+ 0.0005
56.6	4014	4005	— 0.0009.

Ich füge hierzu noch einige Resultate, die ich den zur Bestimmung der fortschreitenden Fehler angestellten Beobachtungen entnehme. Da diese Messungen einige Monate später angestellt sind, so giebt die befriedigende Uebereinstimmung zugleich Gewissheit von dem ungeänderten Zustand der Schraube.

Anfang	Frei von per. Fehlern durch die Anordn. d. Mess.	Corrigirt nach der Tafel	Rechn. — Beob.
9.6	10.3190	10.3223	+ 0.0033
14.8	10.3165	10.3158	— 0.0007
24.6	10.3097	10.3094	— 0.0003
34.6	10.3114	10.3106	— 0.0008
44.9	15.6335	15.6326	— 0.0009
65.0	5.1972	5.1992	+ 0.0020.

Mit Ausnahme von zwei grösseren Abweichungen, welche zu Messungen gehören, die ausserhalb des untersuchten Intervalls liegen, ist die Darstellung eine befriedigende. Es wäre vielleicht wünschenswerth, die ersten und letzten Windungen der Schraube einer speciellen Untersuchung zu unterwerfen, da diese, wie man aus den obigen Abweichungen schliessen darf, ein etwas abweichendes Verhalten zeigen können. Ich habe jedoch diese Prüfung unterlassen, weil die erwähnten Stellen der Schraube nur selten bei Beobachtungen benutzt werden.

Ich möchte die Untersuchungen über die periodischen Fehler nicht verlassen, ohne auf einige Punkte aufmerksam gemacht zu haben, die vielleicht von allgemeinerem Interesse sind. Ich bin dazu veranlasst worden durch Vergleichungen meiner Messungen mit den Beobachtungen, die, wie bereits erwähnt, Herr Prof. Förster vor einer Reihe von Jahren an derselben Schraube angestellt hat. In dem mir gütigst überlassenen Beobachtungsmaterial finden sich zwei grössere Messungsreihen zwischen den Windungen 20 und 30 einerseits und den Windungen 40 und 50 andererseits; benutzt wurde ein Intervall von 10.37 Schraubenumdrehungen. Ich stelle die hieraus für die Stellen 20 und 40 abgeleiteten Correctionsformeln mit den von mir gefundenen zusammen, wobei ich der grösseren Genauigkeit der Vergleichung wegen nur diejenigen meiner Coefficienten benutze, welche der ähnlichen Distanz 10.34 entsprechen. Man hat dann:

bei 20

früher $\varphi(a) = -0.0045 \cos a + 0.0039 \sin a + 0.0005 \cos 2a - 0.0009 \sin 2a$

jetzt $\varphi(a) = +0.0042 \cos a + 0.0011 \sin a - 0.00010 \cos 2a - 0.00014 \sin 2a$

bei 40

früher $\varphi(a) = -0.0041 \cos a + 0.0092 \sin a - 0.0009 \cos 2a - 0.0014 \sin 2a$

jetzt $\varphi(a) = +0.0032 \cos a + 0.0014 \sin a - 0.00037 \cos 2a - 0.00005 \sin 2a.$

Auf den ersten Blick findet zwischen den verschiedenen Formeln nicht der geringste Zusammenhang statt. Man kann jedoch einen grossen Theil der Abweichung erklären, wenn man die Veränderungen berücksichtigt, welche der Apparat in der Zwischenzeit erfahren hat. In der ursprünglichen Einrichtung des Apparates war eine engere oder weitere Stellung der Schraubenmutter dadurch ermöglicht, dass die letztere keine geschlossene Hülse bildete, sondern einen durchgehenden Schlitz hatte, an welchem sie durch leichte Federung sich zu erweitern strebte. Durch eine Correctionsschraube wurde an dieser einen Stelle des Umfanges der federnden Erweiterung entgegengewirkt oder nachgegeben und somit jede beliebige Weite innerhalb gewisser Grenzen eingestellt. Es wurden hierbei allmählich bedeutende Uebelstände der Schraubenbewegung bemerkt, worüber an anderer Stelle Näheres. Eine Abhülfe wurde dadurch herbeigeführt, dass die Schraubenmutter in zwei Hälften geschnitten wurde. Die Stellung dieser beiden Hälften zu einander, also die Weite der Mutter, wurde durch zwei, an gegenüberliegenden Stellen des Umfanges wirkende Correctionsschrauben regulirt. Bei dieser Veränderung der Schrauben-Einrichtung wurde leider in uncontrolirtem Betrage die Stellung des Trommel-Nullpunktes zur Schraubenspindel verändert. Jetzt ist durch eine einfache Vorrichtung für künftige Vermeidung einer solchen Discontinuität Sorge getragen, indem ein rechtwinklig gebogener Zeiger unveränderlich an dem Schraubenkopf befestigt ist, mit welchem stets derselbe Punkt der Schraubentrommel (etwa der Nullpunkt) in Coincidenz erhalten werden kann. — Die Grösse, um welche die Schraubentrommel damals verschoben worden, kann man indessen angenähert aus den obigen Formeln bestimmen. Zu diesem Zweck bringe ich dieselben durch Einführung von Hülfswinkeln auf die folgende Form:

bei 20

früher $\varphi(a) = +0.0059 \sin(a + 311^0) + 0.0010 \sin(2a + 151^0)$

jetzt $\varphi(a) = +0.0043 \sin(a + 75^0) + 0.0002 \sin(2a + 216^0)$

bei 40

früher $\varphi(a) = +0.0101 \sin(a + 336^0) + 0.0017 \sin(2a + 213^0)$

jetzt $\varphi(a) = +0.0035 \sin(a + 66^0) + 0.0004 \sin(2a + 262^0)$.

Wenn man nun in der ersten der beiden früheren Formeln die jedesmalige Angabe um 124^0 oder 34 Theile der Schraubentrommel, in der zweiten um 90^0 oder 25 Theile der Schraubentrommel vermehrt, und wenn man noch zu den Winkelgrössen in den zweiten Gliedern beider Formeln 180^0 hinzu addirt und diese Aenderung durch Ertheilung entgegengesetzter Vorzeichen aufhebt, so findet man die folgende Zusammenstellung:

bei 20

früher $\varphi(a) = +0.0059 \sin(a + 75^0) - 0.0010 \sin(2a + 219^0)$

jetzt $\varphi(a) = +0.0043 \sin(a + 75^0) + 0.0002 \sin(2a + 216^0)$

bei 40

früher $\varphi(a) = +0.0101 \sin(a + 66^0) - 0.0017 \sin(2a + 213^0)$

jetzt $\varphi(a) = +0.0035 \sin(a + 66^0) + 0.0004 \sin(2a + 262^0)$.

Die Formeln sind so vergleichbarer gemacht und es lässt sich hieraus erkennen, dass die früheren und die jetzigen Formeln, wenigstens was die vom einfachen Winkel abhängigen Glieder anbetrifft (die anderen können wegen ihrer Kleinheit und relativ grösseren Unsicherheit hierbei nicht mitstimmen) in der That durch eine Verstellung der Schraubentrommel gegen die Schraubenspindel von einander abweichend geworden sind. Bei 20 deuten die Formeln auf eine Verstellung von 124^0, bei 40 auf eine solche von 90^0, im Durchschnitt auf etwa 107^0. Berechnet man mit Annahme der letzteren Drehung jetzt aus den beiden älteren Formeln die zu den Angaben 0.0, 0.1, 0.2 u. s. w. gehörigen Correctionen und stellt die neuen Werthe daneben, so zeigt sich Folgendes:

	bei 20		bei 40	
Angabe	früher	jetzt	früher	jetzt
0.0	+0.0051	+0.0040	+0.0116	+0.0028
0.1	+0.0069	+0.0038	+0.0099	+0.0033
0.2	+0.0050	+0.0023	+0.0034	+0.0026
0.3	+0.0008	0.0000	−0.0036	+0.0007
0.4	−0.0031	−0.0026	−0.0075	−0.0018
0.5	−0.0049	−0,0043	−0.0085	−0.0036
0.6	−0.0049	−0.0042	−0.0077	−0.0036
0.7	−0.0040	−0.0023	−0.0052	−0.0021
0.8	−0.0021	0.0000	+0.0003	0.0000
0.9	+0.0013	+0.0028	+0.0072	+0.0017.

Es ergiebt sich hieraus das Resultat, dass die Amplitude der Periode jetzt bedeutend kleiner ist als früher, dass also die Fehler der Schraube früher grösser waren, während man doch aus der unvermeidlichen Abnutzung bei einem mehrjährigen Gebrauch eher das Gegentheil hätte erwarten sollen. Dass übrigens ein derartiger Fall nicht vereinzelt dasteht, beweist eine Notiz in den Monthly Notices *), nach welcher auf der Dubliner Sternwarte eine erneute Untersuchung der Mikroskopmikrometerschrauben des Meridiankreises eine Verkleinerung der Amplitude bei unverändertem Gange der Periode nachwies. — Es lag bei unserem Apparate die Vermuthung nahe, die Ursache dieser Abnahme der Amplitude in der geänderten Einrichtung der Schraubenmutter zu suchen. Um allgemein zu entscheiden, ob und in wie weit eine Aenderung in der Stellbarkeit der Schraubenmutter zur Schraubenspindel Einfluss auf die periodischen Fehler ausüben könne, habe ich eine Reihe von Messungen angestellt, bei denen die Weite der Schraubenmutter mehrfach variirt wurde.

Es wurden zunächst beide Druckschrauben gleichmässig fest angezogen, so dass der Spielraum zwischen Mutter und Schraube sehr gering war. Die Distanz der beiden beweglichen Fäden wurde durch alle Zehntel der beiden Windungen 40 und 41 gemessen und im Mittel daraus wurden die Werthe erhalten:

0.0	1.5145
0.1	1.5147
0.2	1.5096
0.3	1.5063
0.4	1.4997
0.5	1.4960
0.6	1.4972
0.7	1.5030
0.8	1.5056
0.9	1.5137.

*) Monthly Notices. Febr. 1876, pag. 167.

Die Vergleichung dieser Zahlen mit den früher bei 40 gemachten Messungen giebt nur unbedeutende Unterschiede zu erkennen. Eine merkliche Aenderung der Amplitude ist also bei einer symmetrisch zur Axe hervorgebrachten Verengung des Spielraums zwischen Schraubenmutter und Schraubenspindel nicht zu erwarten.

Ein zweiter Versuch bestand darin, dass die eine Druckschraube fester angezogen, die andere stark gelockert wurde. Die Distanz der beiden beweglichen Fäden wurde durch alle Zehntel der Windungen 20 und 21 durch gemessen, und aus den Mittelwerthen wurde eine neue Correctionsformel abgeleitet, bei welcher der Einfachheit wegen nur die Glieder mit dem einfachen Winkel berücksichtigt wurden. Man erhielt:

$$\varphi(a) = +0.0050 \cos a + 0.0016 \sin a \ldots$$

Hier ist deutlich eine Vergrösserung der Amplitude ausgesprochen. Berechnen wir vermittelst dieser Formel die für die einzelnen Zehntel des Trommelumfanges geltenden Correctionen und stellen sie mit den aus den anderen Formeln folgenden zusammen, wobei wir der besseren Vergleichung wegen überall nur die einfachen Winkel berücksichtigen wollen, so ergiebt sich:

	Correction bei symmetrisch zur Axe stehender Schraubenmutter	Correction bei unsymmetrisch zur Axe gestellter Schraubenmutter	Correction nach der Formel von Herrn Prof. Förster
20.0	+0.0042	+0.0050	+0.0050
20.1	+0.0040	+0.0049	+0.0059
20.2	+0.0023	+0.0030	+0.0045
20.3	−0.0002	0.0000	+0.0014
20.4	−0.0027	−0.0031	−0.0022

. . . . . .

Die neue Formel nähert sich der für den früheren Zustand des Apparates geltenden, und es scheint daraus hervorzugehen, dass die grössere Amplitude in der früheren Epoche wenigstens theilweise ihren Grund in der einseitigen Stellbarkeit der Weite der Schraubenmutter hat. — Um zu untersuchen, ob dieses Verhalten auch für eine andere Stelle der Schraube bestätigt wird, wurden die Windungen 40 und 41 in derselben Weise durch alle Zehntel hindurch gemessen und aus den Mittelwerthen die neue Correctionsformel gewonnen:

$$\varphi(a) = +0.0056 \cos a + 0.0024 \sin a \ldots$$

Hier zeigt sich, entsprechend dem grösseren Unterschied der früheren und jetzigen Formeln auch eine bedeutendere Vergrösserung der Amplitude. Die Vergleichung ergiebt:

	Correction bei symmetrisch zur Axe stehender Schraubenmutter	Correction bei unsymmetrisch zur Axe gestellter Schraubenmutter	Correction nach der Formel von Herrn Prof. Förster
40.0	+0.0032	+0.0056	+0.0100
40.1	+0.0034	+0.0059	+0.0088
40.2	+0.0023	+0.0040	+0.0043
40.3	+0.0004	+0.0006	−0.0019
40.4	−0.0018	−0.0031	−0.0074

. . . . . .

Die Annahme, dass die grössere Amplitude in der früheren Zeit zum Theil mit der anderen Einrichtung der Schraubenmutter zusammenhängt, scheint also auch hier bestätigt. — Ich erwähne endlich noch einen dritten Versuch, den ich über den Einfluss einer geänderten Stellung der Schraubenmutter angestellt habe. Die Druckschrauben wurden gleichmässig sehr weit gelöst, so dass die Schraube sehr locker ging, und der todte Gang beträchtlich wurde. Bei dieser Stellung wurden die drei Windungen 20 bis 22 durch alle Zehntel durchgemessen. Es ergab sich das merkwürdige Resultat, dass die Periode fast gänzlich verschwunden war, das gemessene Intervall (die Distanz der festen Fäden I und II) aber kleiner als bei den früheren Messungen erhalten wurde. Im Mittel aus den einzelnen Windungen ergab sich:

0.0	10.3366
0.1	10.3370
0.2	10.3373
0.3	10.3377
0.4	10.3363
0.5	10.3363
0.6	10.3353
0.7	10.3350
0.8	10.3347
0.9	10.3380.

Man könnte vielleicht hieraus den Schluss ziehen, dass eine beliebige Vergrösserung des Spielraums zwischen Schraubenmutter und Schraubenspindel benutzt werden könnte, um die periodischen Fehler zum Verschwinden zu bringen.

Dies wird jedoch in der Praxis nicht ausführbar sein, weil der todte Gang ein so erheblicher wird, dass die Einstellungen anderweitige Uebelstände erfahren. Jedenfalls bestätigt auch der dritte Versuch, dass die Stellung der Schraubenmutter zur Schraubenspindel einen wichtigen Einfluss auf die periodischen Fehler ausübt. Freilich werden in der Wirklichkeit so starke Aenderungen, wie ich sie absichtlich bei meinen Versuchen hervorgebracht habe, nicht gut stattfinden können; aber ohne Zweifel würden auch kleinere Aenderungen, die nicht immer zu vermeiden sind, störenden Einfluss haben. Mir scheint daher der angeregte Punkt nicht ganz ohne Interesse zu sein. Gewiss ist er ein Grund mehr, bei der Behandlung von Mikrometerschrauben die grösste Vorsicht zu beachten und nicht allzu sehr auf die Zuverlässigkeit der einmal gefundenen Correctionen zu vertrauen. Wenn man den unberechenbaren Einfluss dieser und anderer Fehlerquellen bedenkt, welche auf das Verhalten der Schraube einwirken können, so wird man eine Anwendung der für irgend eine Epoche bestimmten periodischen Fehler auf die Beobachtungen längerer Zeiträume für durchaus bedenklich halten und eine wiederholte Prüfung derselben nicht scheuen. Wie gefährlich eine Vernachlässigung dieser Vorsicht ist, beweist recht deutlich die unangenehme Erfahrung, die man im Jahre 1875 an den Ablesungsmikroskopen des Greenwicher *) Meridiankreises gemacht hat. Die Schrauben derselben, welche seit einem Zeitraum von mehr als 20 Jahren nicht von Neuem untersucht waren, zeigten schliesslich Fehler von so erheblicher Verschiedenheit, wahrscheinlich veranlasst durch die Abnutzung während des langen Gebrauches, dass für alle mit dem Instrument gemachten Declinationsbeobachtungen, sofern sie Anspruch auf den höchsten Grad der Genauigkeit haben wollen, nachträgliche Correctionen erforderlich geworden sind, die aber schwer mit Sicherheit zu bestimmen sein dürften.

Ich wende mich nun zur Untersuchung der fortschreitenden Fehler der Mikrometerschraube. Obgleich die früheren Messungen für die periodischen Fehler bereits gezeigt hatten, dass innerhalb der betrachteten Ausdehnung von der 20^{ten} bis zur 60^{ten} Windung der Werth einer Schraubenwindung nur wenig variire, so hielt ich doch eine besondere Untersuchung über diesen Gegenstand nicht für überflüssig, da bei feinen Messungen auch unbedeutende Unterschiede Berücksichtigung verdienen, und da man ausserdem kein Mittel besitzt, um in ähnlicher Weise, wie bei den periodischen Fehlern, durch die Anordnung der Messungen von dem Einfluss der fortschreitenden Fehler frei zu werden. Es trat hier der schon früher erwähnte Uebelstand ein, dass die Einrichtung des Apparates die Benutzung der verschiedenen Fadendistanzen nur innerhalb gewisser Gränzen gestattete, und dass ferner wegen der geringen Zahl dieser Distanzen nicht die gewünschte Menge von Combinationen möglich war. Man hätte diesem Uebelstand vielleicht durch Benutzung eines Mikroskops abhelfen können, welches entweder mit einer Glasscala oder mit einem beweglichen Fadensystem versehen an die Stelle des Oculars gebracht und vermittelst des Ocularschlittens über die ganze Länge der Schraube hinweggeführt werden konnte; auf diese Weise hätte man beliebig viele, in einem bestimmten Verhältniss zu einander stehende Intervalle an beliebigen Stellen der Schraube messen können. Ich benutzte trotzdem dieses Hülfsmittel nicht, um nicht von neuen Fehlern beeinflusst zu werden, die bei einer nicht ganz gesicherten Parallelführung durch die Aenderung in dem Abstande zwischen Mikroskopobjectiv und dem zu messenden Intervall herbeigeführt werden konnten, und die möglicher Weise die gewünschte Genauigkeit nicht zu erreichen erlaubt hätten. — Ich begnügte mich daher, die vorhandenen Fadendistanzen möglichst vortheilhaft zu combiniren. — Der Einfluss der periodischen Fehler wurde nicht durch Anwendung der berechneten Tafel, sondern durch die Anordnung der Messungen beseitigt, indem in der bekannten Weise nicht nur bei dem beabsichtigten Anfangspunkt m, sondern auch bei $m - 0^R.4$, $m - 0.2$, $m + 0.2$, $m + 0.4$ begonnen und das arithmetische Mittel aus allen Werthen genommen wurde. Da bei jedem Anfangs- und Endpunkt mindestens 5 Einstellungen gemacht wurden, so beruht jedes Resultat auf mindestens 50 Einstellungen. — Es wurden die drei Intervalle der Fäden III und IV, II und III und I und III, von denen jedes ungefähr doppelt so viel Windungen enthält als das vorgehende, in der folgenden Weise gemessen:

Anfang	Intervall III—IV	Anfang	Intervall II—III	Anfang	Intervall I—III
24.8	5.1998	19.3	10.4327	19.3	20.7403
29.7	1986	24.6	4326	24.6	7398
35.0	2006	29.6	4306	29.6	7437
40.0	2021	34.9	4301	34.6	7450
45.3	2013	39.9	4353	39.6	7440
50.3	2026	44.9	4335		
55.3	2000	49.9	4335.		

Wenn man die nach allem Vorhergehenden sehr berechtigte Annahme macht, dass die Correction für die fortschreitenden Fehler innerhalb mehrerer Zehntel einer Windung als constant angenommen werden darf, so kann man in den aus den obigen Beobachtungen abzuleitenden Gleichungen statt der Correction $\varphi(19.3)$ den Werth $\varphi(20)$, statt $\varphi(24.6)$ und $\varphi(24.8)$ den Werth $\varphi(25)$, statt $\varphi(29.6)$ und $\varphi(29.7)$ den Werth $\varphi(30)$ u. s. w., endlich statt $\varphi(60.3)$ und $\varphi(60.5)$ den Werth $\varphi(60)$ einführen. Man kann ferner nach dem Früheren zwei von den Correctionen als willkürlich annehmen. Setzen wir daher $\varphi(20) = 0$ und $\varphi(60) = 0$, bezeichnen wir ausserdem die wahren Werthe der gemessenen Intervalle mit $5^R.20 + x_1$, $10^R.43 + x_2$, $20^R.74 + x_3$, so ergeben sich aus den obigen Zahlen die folgenden Gleichungen:

*) Monthly Notices Febr. 1876, pag. 163. — Monthly Notices Nov. 1876, pag. 18 ff.

$$
\begin{aligned}
x_1 &= -0.0002 + \varphi(30) - \varphi(25)\\
&= -0.0014 + \varphi(35) - \varphi(30)\\
&= +0.0006 + \varphi(40) - \varphi(35)\\
&= +0.0021 + \varphi(45) - \varphi(40)\\
&= +0.0013 + \varphi(50) - \varphi(45)\\
&= +0.0026 + \varphi(55) - \varphi(50)\\
&= \quad 0.0000 \qquad - \varphi(55)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_2 &= +0.0027 + \varphi(30)\\
&= +0.0026 + \varphi(35) - \varphi(25)\\
&= +0.0006 + \varphi(40) - \varphi(30)\\
&= +0.0001 + \varphi(45) - \varphi(35)\\
&= +0.0053 + \varphi(50) - \varphi(40)\\
&= +0.0035 + \varphi(55) - \varphi(45)\\
&= +0.0035 \qquad - \varphi(50)
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
x_3 &= +0.0003 + \varphi(40)\\
&= -0.0002 + \varphi(45) - \varphi(25)\\
&= +0.0037 + \varphi(50) - \varphi(30)\\
&= +0.0050 + \varphi(55) - \varphi(35)\\
&= +0.0040 \qquad - \varphi(40)
\end{aligned}
$$

Aus diesen 19 Gleichungen sind nun die wahrscheinlichsten Werthe der 10 Unbekannten x_1, x_2, x_3, $\varphi(25)$, $\varphi(30)$ .... nach der Methode der kleinsten Quadrate zu bestimmen. Die strenge Auflösung giebt die folgenden Werthe:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= +0.0008 & \varphi(25) &= -0.0005 & \varphi(40) &= +0.0021\\
x_2 &= +0.0026 & \varphi(30) &= +0.0001 & \varphi(45) &= +0.0014\\
x_3 &= +0.0027 & \varphi(35) &= +0.0008 & \varphi(50) &= +0.0002\\
& & & & \varphi(55) &= -0.0008.
\end{aligned}
$$

Wendet man diese Werthe auf die Beobachtungen an, so erhält man die übrig bleibenden Unterschiede:

Intervall III—IV	II—III	I—III
— 0.0004	+ 0.0002	— 0.0003
— 0.0015	+ 0.0013	— 0.0009
+ 0.0011	0.0000	+ 0.0012
+ 0.0007	— 0.0018	+ 0.0007
— 0.0007	+ 0.0009	— 0.0008
+ 0.0007	— 0.0013	
0.0000	+ 0.0007.	

Aus diesen Zahlen folgt für den wahrscheinlichen Fehler eine mittelst der obigen Correctionen verbesserten Beobachtung der Werth $r = \pm 0^R.00091 = \pm 0''.014$. —

Die gefundenen Correctionen, in denen sich ein ziemlich regelmässiger Gang ausspricht, sind so klein, dass man sie in den meisten Fällen wird vernachlässigen können; bei sehr feinen Messungen wird jedoch ihre Kenntniss nicht unwillkommen sein. Um für Windungen, die ausserhalb des betrachteten Intervalls 20^R bis 60^R liegen, wenigstens genähert den Einfluss der fortschreitenden Fehler kennen zu lernen, wurde das Intervall I bis III von den Anfangspunkten 10 und 15 und ferner die Distanz III bis IV von den Anfangspunkten 60 und 65 gemessen. Mit Benutzung der oben ermittelten wahrscheinlichsten Werthe dieser Distanzen und der Correctionen $\varphi(20)$, $\varphi(35)$, $\varphi(60)$ wurden daraus die Werthe gefunden:

$$
\begin{aligned}
\varphi(10) &= +0.0089\\
\varphi(15) &= +0.0059\\
\varphi(65) &= +0.0021\\
\varphi(70) &= +0.0057.
\end{aligned}
$$

Es ergiebt sich, dass die Anfangs- und Endwindungen der Schraube merkliche fortschreitende Fehler besitzen; indess ist die genauere Bestimmung derselben wegen der verhältnissmässig seltenen Benutzung dieser Windungen von geringerem Interesse. — Die früher von Herrn Professor Förster ermittelten fortschreitenden Fehler der Schraube waren wesentlich andere. Ich gebe im Folgenden ihre Hauptwerthe an:

$$
\begin{aligned}
\varphi(15) &= -0.023\\
\varphi(20) &= +0.001\\
\varphi(25) &= +0.008\\
\varphi(30) &= +0.016\\
\varphi(35) &= +0.021\\
\varphi(40) &= +0.026\\
\varphi(45) &= +0.029\\
\varphi(50) &= +0.029\\
\varphi(55) &= +0.028\\
\varphi(60) &= +0.020\\
\varphi(65) &= +0.012\\
\varphi(70) &= +0.002.
\end{aligned}
$$

Allerdings können diese Werthe nicht direct mit den meinigen verglichen werden, weil die Fundamentalpunkte nicht $\varphi(20)$ und $\varphi(60)$, sondern $\varphi(19)$ und $\varphi(71)$ waren, aber eine blosse Uebersicht zeigt, dass die fortschreitenden Fehler in der früheren Epoche erheblich grösser waren. — Um die jetzige Verkleinerung der Fehler zu erklären, hat man zu beachten, dass die Ursache der fortschreitenden Fehler früher zum grossen Theil in einer Ungleichheit der Durchmesser des Schraubencylinders (die Schraube erhielt dadurch ungleichen Spielraum in der Schraubenmutter) gefunden wurde. Dies liess sich folgendermaassen nachweisen. Wenn man in den beiden entgegengesetzten Lagen der Schraube oben und unten dieselbe Coinciden z prüft, so wird man verschiedene Ablesungen erhalten, weil die Schwere jedes Mal in verschiedenem Sinne auf die Ablesung wirkt. Ist der

Spielraum zwischen Schraubenspindel und Schraubenmutter an allen Stellen der Schraube derselbe, so muss die Differenz zwischen der Coincidenz oben und der Coincidenz unten überall gleich sein. Wenn dieser Spielraum sich aber ändert, so werden auch die Differenzen andere werden, und in Folge dessen muss auch ein und dieselbe Distanz, die man in entgegengesetzten Lagen zwischen denselben Windungen der Schraube misst, durch andere Werthe dargestellt werden. —

Von Herrn Prof. Förster wurde ein und dieselbe Distanz von 10.3 Umdrehungen zwischen den Windungen 13 und 23, wie folgt, gemessen

bei Schraube oben	10.322
bei Schraube unten	10.368.

Das arithmetische Mittel 10.345 gab einen von dem Einfluss des ungleichen Spielraums unabhängigen Werth, und die Correction, die in Folge des ungleichen Spielraums zwischen den Windungen 13 und 23 bei Schraube oben anzubringen war, betrug + 0.023. — Ebenso wurde dieselbe Distanz zwischen den Windungen 61 und 71, wie folgt, gemessen

bei Schraube oben	10.388
bei Schraube unten	10.338.

Das arithmetische Mittel war 10.363; die Correction, die zwischen den Windungen 61 und 71 bei Schraube oben erforderlich war, betrug hier — 0.025. Wurden mit diesen Correctionen die aus der Tafel der fortschreitenden Ausgleichungen folgenden Correctionen verglichen, so ergab sich:

	Correct. wegen ungleichen Spielraums	Correct. aus der Tafel für die fortschreitenden Fehler
zwischen 13 und 23	+ 0.023	+ 0.053
zwischen 61 und 71	— 0.025	— 0.018.

Es ergab sich hieraus, dass in der That ein grosser Theil der fortschreitenden Fehler durch die Ungleichheit des Spielraums erklärt wurde. Die Variation der Grösse dieses Spielraums wurde ausserdem noch direct durch folgende Messungen bestimmt:

	Coincidenz unten — oben
bei 10	+ 0.0778
13	+ 0.0769
38	+ 0.1171
60	+ 0.0662.

Diese Zahlen zeigen, dass der Durchmesser der Schraubenspindel in der Mitte, etwa bei 30, am kleinsten ist. — Ich habe bei dem jetzigen Zustande des Apparates ebenfalls an mehreren Stellen Coincidenzprüfungen in verschiedenen Lagen angestellt und gefunden:

	Coincidenz unten — oben
bei 10	+ 0.0108
38	+ 0.0123
60	+ 0.0063.

Die Vergleichung mit den obigen für den früheren Zustand des Apparates geltenden Werthen zeigt, dass durch die an dem Apparat vorgenommene Aenderung der Spielraum ungefähr um das Zehnfache verkleinert worden ist, und man darf schliessen, dass dadurch die bedeutende Verkleinerung der jetzigen, bei Schraube oben gefundenen fortschreitenden Fehler hervorgebracht worden ist. Hierzu wird ausdrücklich bemerkt, dass nicht etwa der frühere Spielraum in sorgloser Weise zu gross belassen worden war. Die nur einseitige Stellbarkeit der Weite der Mutter machte in Verbindung mit der Ungleichheit der Durchmesser an verschiedenen Stellen der Schraubenspindel jenen Spielraum unvermeidlich, wenn man nicht nach den Enden der Schraubenspindel hin unzulässigen Zwang der Bewegung haben wollte. — Ein Zusammenhang zwischen den wegen des ungleichen Spielraums erforderlichen Correctionen und den berechneten fortschreitenden Ungleichheiten lässt sich in dem jetzigen Zustande des Apparates bei der Kleinheit der Zahlen, die nie die dritte Decimale übersteigen, nicht mehr deutlich nachweisen, da sich wahrscheinlich die in Rede stehende Wirkung der noch immer verschiedenen Spielräume in der Mutter mit der wirklichen Ungleichheit der Windungen vermischt.

Ich habe es nicht für unwichtig gehalten, zum Schluss noch einige ausführliche Messungsreihen zu machen, um die Grösse jenes Spielraums über die ganze Ausdehnung der Schraube möglichst gut kennen zu lernen und gleichzeitig den Einfluss verschiedener Drehungsrichtungen zu untersuchen. Zu diesem Zweck wurde so verfahren, dass die Coincidenzen des einen beweglichen Fadens mit einem der festen Fäden geprüft wurde, während die Schraube die Lage oben, unten, rechts und links hatte und die Drehung einmal im Sinn der wachsenden, das andere Mal im Sinne der abnehmenden Ablesungen geschah. Um den Einfluss etwaiger Aenderungen während der Ausführung einer solchen Messungsreihe unschädlich zu machen, wurde zuerst in der Reihenfolge Schraube oben, rechts, unten, links bei directer Drehung, dann in umgekehrter Folge bei inverser Drehung, drittens wieder bei inverser Drehung, aber in der ersten Anordnung, endlich bei directer Drehung in der Reihenfolge links, unten, rechts, oben gemessen. Bei jeder Lage wurden drei Einstellungen nach einander gemacht, so dass jede Coincidenz auf 6 Einstellungen beruht. Auf diese Weise wurde bei den Windungen 10, 20, 30 .... 60, 70 verfahren, und zwar wurde jede Reihe an verschiedenen Tagen mehrere Mal wiederholt. Ich führe beispielsweise die in

der Nähe der 20sten Windung gemachten Beobachtungen an, wobei ich bemerke, dass die erste Reihe bei gewöhnlicher Zimmertemperatur, während der Apparat in dem früher erwähnten Stativ ruhte, ausgeführt wurde, die anderen Beobachtungen dagegen an dem Aequatorealinstrumente selbst angestellt wurden.

Oben		Unten		Rechts		Links	
Direct	Invers	Direct	Invers	Direct	Invers	Direct	Invers
20.0003	19.9985	20.0140	20.0113	—	—	—	—
19.9930	19.9865	20.0057	20.0047	20.0018	19.9995	20.0038	19.9998
19.9955	19.9847	20.0059	20.0052	20.0031	19.9936	20.0028	19.9988
20.0073	20.0018	20.0248	20.0239	20.0237	20.0129	20.0212	20.0119
21.5782	21.5736	21.5893	21.5849	21.5877	21.5833	21.5843	21.5834.

Man sieht aus sämmtlichen Reihen übereinstimmend, dass zwischen den Angaben oben und unten noch immer ein ziemlich bedeutender Unterschied besteht, welcher trotz der natürlich auch vorhandenen Feder durch die Einwirkung der Schwere veranlasst ist, dass dagegen die Angaben rechts und links, bei denen dieser Einfluss fehlt, fast vollkommen übereinstimmen. — Ich habe bei allen untersuchten Stellen die arithmetischen Mittel aus den Differenzen oben und unten und ebenso aus den Differenzen rechts und links gebildet, wobei ich zwischen den durch directe und inverse Drehung erhaltenen Werthen keinen Unterschied gemacht habe, und ebenso habe ich die arithmetischen Mittel aus den Differenzen direct und invers für die 4 verschiedenen Lagen der Schraube gebildet. Man erhält so:

			Direct — Invers			
	Unten — Oben	Rechts — Links	Oben	Unten	Rechts	Links
bei 10	+ 0.0108	— 0.0018	+ 0.0040	— 0.0019	— 0.0012	+ 0.0012
20	+ 0.0140	— 0.0001	+ 0.0058	+ 0.0019	+ 0.0068	+ 0.0046
30	+ 0.0158	— 0.0011	+ 0.0073	+ 0.0001	+ 0.0035	+ 0.0053
40	+ 0.0123	+ 0.0008	+ 0.0041	+ 0.0007	+ 0.0042	+ 0.0033
50	+ 0.0076	+ 0.0003	+ 0.0102	+ 0.0020	+ 0.0023	+ 0.0019
60	+ 0.0063	— 0.0001	+ 0.0086	+ 0.0016	+ 0.0014	+ 0.0017
70	+ 0.0010	+ 0.0036	+ 0.0034	+ 0.0018	+ 0.0004	+ 0.0016
Mittel	+ 0.0095	+ 0.0002	+ 0.0062	+ 0.0009	+ 0.0025	+ 0.0028.

Es zeigt sich hier ebenfalls, dass der durch die Schwere verursachte Unterschied unten — oben in der Gegend bei 30 sein Maximum erreicht und nach den Enden der Schraube zu abnimmt. Dies lässt darauf schliessen, dass der Spielraum zwischen Schraubenmutter und Schraubenspindel an dieser Stelle am grössten ist, wahrscheinlich eine Folge der grösseren Abnutzung, welche der Schraubencylinder nahe in der Mitte erfahren hat. Man wird daher eine bestimmte Distanz in Folge dieses veränderlichen Spielraums innerhalb der ersten 30 bis 40 Windungen bei Schraube unten grösser, innerhalb der letzten Windungen kleiner als bei Schraube oben finden müssen. —

Die Differenz rechts — links, die von der Schwere unabhängig ist, bleibt, wie zu erwarten war, innerhalb so kleiner Gränzen, dass sie ganz vernachlässigt werden darf.

Was die Differenz direct — invers bei den verschiedenen Lagen der Schraube betrifft, so rührt dieselbe grösstentheils daher, dass der Widerstand des Schlittens bei den entgegengesetzten Drehungsrichtungen ein anderer ist, je nachdem die Spannung der Feder vergrössert oder verkleinert wird. Im Mittel aus allen Werthen direct — invers bei horizontaler und ebenso bei verticaler Lage erhalten wir die Werthe:

Dir. — Inv.		
bei horizontaler Lage	bei verticaler Lage	Hor. — Ver.
+ 0.0027	+ 0.0035	— 0.0008.

Man sieht, dass der Unterschied zwischen den beiden Werthen nur unbedeutend ist. Wenn man die einzelnen Lagen für sich betrachtet, so ergiebt sich für die Differenz direct — invers bei rechts und links nahe derselbe Werth; dagegen findet sich bei Schraube oben ein beträchtlich grösserer, bei Schraube unten ein beträchtlich kleinerer Werth. Ich habe eine ganz befriedigende Erklärung dafür nicht finden können. — Von dem störenden Einfluss der Schwere und des Widerstandes des Schlittens auf die Messungen könnte man frei werden, wenn man immer in entgegengesetzten Lagen und bei entgegengesetzten Drehungsrichtungen messen würde. Nimmt man bei den für 20 angegebenen Coincidenzen aus den 4 zusammengehörigen Angaben jeder Reihe bei horizontaler Lage und ebenso bei verticaler Lage die arithmetischen Mittel, so erhält man ziemlich nahe übereinstimmende von Schwere und Widerstand unabhängige Werthe; man findet

Coinc. bei vert. Lage	Coinc. bei horiz. Lage	H. — V.
19.997	20.001	+ 0.004
19.998	19.999	+ 0.001
20.014	20.017	+ 0.003
21.582	21.584	+ 0.002.

Es folgt aus den vorangehenden Untersuchungen, dass man bei Beobachtungen in verschiedenen Stundenwinkeln auf die verschiedene Lage der Schraube Rücksicht nehmen müsste. Wenn man aus Messungen, die bei anderer Lage als

bei Schraube oben angestellt sind, die fortschreitenden Fehler berechnen wollte, so würde man ohne Zweifel mehr oder weniger stark abweichende Resultate finden. Eine strenge Behandlung der Aufgabe würde daher verlangen, dass man dieselbe Distanz von demselben Anfangspunkt aus bei verschiedenen Lagen der Schraube mäfse und dass man aus den so erhaltenen Normalwerthen die fortschreitenden Fehler berechnete; für die verschiedenen Lagen wären dann besondere Correctionstafeln erforderlich. Da bei unserem Apparate die fortschreitenden Ausgleichungen nur bei Schraube oben gefunden wurden, so sind dieselben natürlich auch nur für Beobachtungen, die bei dieser Lage angestellt sind, anwendbar. Bei der Kleinheit der Fehler, die innerhalb der meistens benutzten Windungen 20 bis 60 ganz vernachlässigt werden könnten, schien es mir überflüssig, spezielle Bestimmungen für die anderen Lagen auszuführen. — Zum Schluss gebe ich noch eine Tafel der an den verschiedensten Stellen der Schraube bestätigten, somit aller Wahrscheinlichkeit nach auch bei allen Lagen gültigen periodischen Ausgleichungen der Schraube.

Tafel der periodischen Ausgleichungen.

Angabe	Correction	Angabe	Correction
R	R	R	R
0.00	+ 0.0037	0.50	— 0.0042
0.01	+ 0.0038	0.51	— 0.0043
0.02	+ 0.0038	0.52	— 0.0044
0.03	+ 0.0038	0.53	— 0.0044
0.04	+ 0.0039	0.54	— 0.0044
0.05	+ 0.0039	0.55	— 0.0044
0.06	+ 0.0039	0.56	— 0.0044
0.07	+ 0.0039	0.57	— 0.0044
0.08	+ 0.0038	0.58	— 0.0043
0.09	+ 0.0038	0.59	— 0.0042
0.10	+ 0.0037	0.60	— 0.0041
0.11	+ 0.0037	0.61	— 0.0040
0.12	+ 0.0036	0.62	— 0.0038
0.13	+ 0.0035	0.63	— 0.0037
0.14	+ 0.0034	0.64	— 0.0035
0.15	+ 0.0033	0.65	— 0.0033
0.16	+ 0.0031	0.66	— 0.0031
0.17	+ 0.0030	0.67	— 0.0029
0.18	+ 0.0028	0.68	— 0.0027
0.19	+ 0.0027	0.69	— 0.0025
0.20	+ 0.0025	0.70	— 0.0022
0.21	+ 0.0023	0.71	— 0.0020
0.22	+ 0.0021	0.72	— 0.0017
0.23	+ 0.0019	0.73	— 0.0014
0.24	+ 0.0017	0.74	— 0.0012
0.25	+ 0.0014	0.75	— 0.0009
0.26	+ 0.0012	0.76	— 0.0007
0.27	+ 0.0010	0.77	— 0.0004
0.28	+ 0.0007	0.78	— 0.0001
0.29	+ 0.0004	0.79	+ 0.0001
0.30	+ 0.0002	0.80	+ 0.0004
0.31	— 0.0001	0.81	+ 0.0007
0.32	— 0.0004	0.82	+ 0.0009
0.33	— 0.0007	0.83	+ 0.0011
0.34	— 0.0009	0.84	+ 0.0014
0.35	— 0.0012	0.85	+ 0.0016
0.36	— 0.0015	0.86	+ 0.0018
0.37	— 0.0017	0.87	+ 0.0020
0.38	— 0.0020	0.88	+ 0.0022
0.39	— 0.0023	0.89	+ 0.0024
0.40	— 0.0025	0.90	+ 0.0026
0.41	— 0.0027	0.91	+ 0.0027
0.42	— 0.0030	0.92	+ 0.0029
0.43	— 0.0032	0.93	+ 0.0030
0.44	— 0.0034	0.94	+ 0.0032
0.45	— 0.0036	0.95	+ 0.0033
0.46	— 0.0038	0.96	+ 0.0034
0.47	— 0.0039	0.97	+ 0.0035
0.48	— 0.0040	0.98	+ 0.0036
0.49	— 0.0042	0.99	+ 0.0037
0.50	— 0.0042	1.00	+ 0.0037

VITA.

Natus sum, Gustavus Müller, Suidnicii in urbe Silesiae die 7 m. Maji a. 1851 patre Theodoro, quem praematura morte ereptum valde lugeo, et matre Laura de gente Fischer. Primis litterarum elementis instructus a. 1861 in gymnasium Suidnicense, quod adhuc rectore Friede floret, receptus sum. A. 1870 Lipsiam profectus sum, ubi duos per annos scholis interfui Neumanni, Scheibneri, Hankelii, Kolbii, Drobischii. Deinde Berolinum petivi et quatuor per annos scholas adii Foersteri, Tietjeni, Kummeri, Weierstrassii, Hoppii, Helmholtzii, Ermani. Quibus viris optime de me meritis gratias ago quam maximas.

THESEN.

1) Die Anwendung grosser Spiegeltelescope verspricht mehr Erfolge als die Anwendung dioptrischer Fernröhre.

2) Die Methode, den Werth der Sonnenparallaxe aus Beobachtungen der kleinen Planeten herzuleiten, steht anderen Methoden nach.

3) Die Existenz eines zwischen Sonne und Mercur befindlichen Planeten ist sehr wahrscheinlich.